Física de la materia condensada

Hoja 1

Ejercicio 1: Operador de una partícula
Considerar un sistema de dos estados cuánticos con N bosones. Dado un operador $\hat{F} = \sum_{i=1}^{N} \hat{f}$ que actúa sobre cada una de las partículas del sistema de la forma $f_{\mu\nu} = \langle\mu|\hat{f}|\nu\rangle$,

i) Escribir las posibles funciones de onda del sistema, $|N_1,N_2\rangle$, para $N = 3$.
ii) ¿Cómo actúa el operador $\hat{F}$ sobre el estado $|2,1\rangle$?
iii) Calcular los elementos de matriz $\langle 1,2|\hat{F}|2,1\rangle$ y $\langle 2,1|\hat{F}|2,1\rangle$.
iv) Para $N = 4$, escribir la función de onda de los estados $|\mathrm{a}\rangle = |2,2\rangle$ y $|\mathrm{b}\rangle = |3,1\rangle$. Calcular los elementos de matriz $\langle \mathrm{a}|\hat{F}|\mathrm{b}\rangle$ y $\langle \mathrm{b}|\hat{F}|\mathrm{a}\rangle$.
v) Repetir los dos apartados anteriores usando el formalismo de segunda cuantización, con

$$\hat{F} = \sum_{\mu,\nu} f_{\mu\nu}\hat{a}^\dagger_\mu \hat{a}_\nu. \tag{1}$$

vi) Repetir los apartados anteriores suponiendo que las partículas son fermiones.

Ejercicio 2: Reglas de anticonmutación fermiónicas
Demostrar usando la definición de operadores fermiónicos que

$$\langle \hat{c}^\dagger_l \hat{c}^\dagger_m \hat{c}_n \hat{c}_p\rangle = \langle \hat{c}^\dagger_l \hat{c}_p\rangle\langle \hat{c}^\dagger_m \hat{c}_n\rangle - \langle \hat{c}^\dagger_l \hat{c}_n\rangle\langle \hat{c}^\dagger_m \hat{c}_p\rangle, \tag{2}$$

donde $\langle \dots \rangle = \langle \Psi_{\vec{N}}|\dots|\Psi_{\vec{N}}\rangle$. $|\Psi_{\vec{N}}\rangle$ es un determinante de Slater formado por N electrones llenando los orbitales unielectrónicos expresados en la base $\phi_n(\vec{r})$:

$$|\Psi_{\vec{N}}\rangle = \prod_n c^\dagger_n|0\rangle, \tag{3}$$

con $n = 1, \dots, N$, y donde $|0\rangle$ representa el vacío de fermiones.

Ejercicio 3: Singletes
Considerar un sistema de dos orbitales $l = 1,2$ ocupados por un total de dos electrones con la componente z del espín (σ=↑,↓) opuesta. Las transiciones entre ambos estados están descritas por el operador:

$$\hat{H}_\tau = -\tau \sum_{i\neq j,\ \sigma} \left(\hat{c}^\dagger_{i\sigma}\hat{c}_{j\sigma} + \mathrm{h.c.}\right) \tag{4}$$

i) Escribir los posibles estados $|\mu\rangle$ de esta configuración.
ii) Escribir las distintas componentes del operador $\langle\mu|\hat{H}_\tau|\nu\rangle$ en el conjunto anterior.
ii) Repertir los apartados anteriores en la base de autoestados del espín total.

Ejercicio 4: Operadores de campo cuántico

i) Obtener la expresión de los operadores de campo cuántico $\hat{\Psi}(\vec{r})$ y $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})$ mediante el cambio de base $|\nu\rangle \to |\vec{r}\rangle$ de los operadores de destrucción y creación $\hat{a}_\nu$ y $\hat{a}^\dagger_\nu$ en la base de estados $\{|\nu\rangle\}$. Tener en cuenta que los coeficientes del cambio de base son $\psi_\nu(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\nu\rangle$.

ii) Especificar el resultado anterior en la base de ondas planas, con:

$$\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{5}$$

iii) Obtener sus propiedades de conmutación dependiendo de que los operadores $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}$ describan bosones o fermiones.

Ejercicio 5: Operadores de espín

Escribir los operadores de espín $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\tau}$ en segunda cuantización, siendo $\vec{\tau}$ las matrices de Pauli:

$$\tau_{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{\mathrm{y}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \tau_{\mathrm{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$