Física de la materia condensada

Hoja 2

Ejercicio 1: Cambios de base en segunda cuantización
Siendo $\{|\mu\rangle\}$ y $\{|\nu\rangle\}$ dos bases completas con las que escribimos el estado de un sistema de N partículas. Demostrar que el cambio de base no afecta:

i) al carácter fermiónico o bosónico del sistema
ii) ni a su número de partículas.

Ejercicio 2: Energía cinética
El término cinético del hamiltoniano de un gas de N electrones viene dado por $\hat{T} = -\hbar^2(2m)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}_i^2$. Obtener su expresión en segunda cuantización en la base de ondas planas con momento $\hbar\vec{k}$ y spin σ.

Ejercicio 3: Interacción coulombiana
Calcular la transformada de Fourier $\mathcal{U}(\vec{q})$ de la interacción coulombiana $U(\vec{r}) = e_0^2 r^{-1}$, con $r = |\vec{r}|$. (Pista: utilizar el límite $a \to 0$ de la interacción apantallada de Yukawa, $U_a(r) = e_0^2 \mathrm{e}^{-ar} r^{-1}$).

Ejercicio 4: Gas de electrones degenerado
Para un gas de electrones en un entorno de carga positiva homogénea (es decir, con una densidad constante $n(\vec{r}) = N/\Omega$) en un volumen $\Omega = L^3$, el hamiltoniano viene dado por:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{el}} + \hat{H}_{\mathrm{back}} + \hat{H}_{\mathrm{el-back}}, \tag{1}$$

donde

$$\hat{H}_{\mathrm{back}} = \frac{e_0^2}{2}\int \mathrm{d}\vec{r}\mathrm{d}\vec{r}'\, \frac{n(\vec{r})n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-a|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{2}$$

describe la energía del entorno,

$$\hat{H}_{\mathrm{el-back}} = -e_0^2 \sum_i \int \mathrm{d}\vec{r}\, \frac{n(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} e^{-a|\vec{r}-\vec{r}_i|}, \tag{3}$$

la interacción de cada electrón con el entorno y $\hat{H}_{\mathrm{el}} = \hat{T} + \hat{H}_{\mathrm{el-el}}$, con

$$\hat{H}_{\mathrm{el-el}} = \frac{1}{2\Omega}\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2.\vec{q}} \mathcal{U}_a(\vec{q})\, \hat{c}^\dagger_{\vec{k}_1+\vec{q},\sigma_1}\hat{c}^\dagger_{\vec{k}_2-\vec{q},\sigma_2}\hat{c}_{\vec{k}_2,\sigma_2}\hat{c}_{\vec{k}_1,\sigma_1}. \tag{4}$$

Utilizando de nuevo la interacción de Yukawa (y su transformada de Fourier), mostrar que el término con $\vec{q} = 0$ de (4) neutraliza la contribución del entorno dada por $\hat{H}_{\mathrm{back}} + \hat{H}_{\mathrm{el-back}}$.

Ejercicio 5: Propiedades macroscópicas
Usando la energía interna de un gas de electrones ocupando un volumen V:

$$U = \int \mathrm{d}E E g(E) f(E), \tag{5}$$

donde $g(E) = V(2m)^{3/2}\sqrt{E}/(2\pi^2\hbar^3)$ es la densidad de estados y $f(E)$ es la distribución de Fermi-Dirac, y su magnetización bajo un campo magnético H,

$$M = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}E\,[g(E{+}\mu_\mathrm{B}H) - g(E{-}\mu_\mathrm{B}H)]\,f(E), \tag{6}$$

probar que para bajas temperaturas (en el límite $T \to 0$):

i) el calor específico por unidad de volumen,

$$c_V = \frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial T}, \tag{7}$$

es lineal en T;

ii) la susceptibilidad magnética

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} \tag{8}$$

es independediente de T.

Pista: usar la expansión de Sommerfeld.