Física de la materia condensada

Hoja 3

Ejercicio 1: Densidad de estados en n dimensiones
Obtener la densidad de estados de un gas de electrones libres en n=2 y n=1 dimensiones.

Ejercicio 2: Espectro de excitación en la aproximación Hartree-Fock
El espectro de excitación del modelo *jellium* en la aproximación Hartree-Fock es de la forma:

$$\mathcal{E}(k,\sigma) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{e_0^2 k_\mathrm{F}}{\pi}\left(1 + \frac{k_\mathrm{F}^2 - k^2}{2kk_\mathrm{F}}\ln\left|\frac{k_\mathrm{F}+k}{k_\mathrm{F}-k}\right|\right). \tag{1}$$

Su derviada $\mathrm{d}\mathcal{E}(k,\sigma)/\mathrm{d}k$ diverge en la superficie de Fermi, involucrando que la masa efetiva de los portadores sería cero.

i) Discutir si dicha anomalía desaparece al considerar el apantallamiento de la interacción coulombiana (interacción de Yukawa).
ii) Usando de nuevo la repulsión de Yukawa, calcular $\mathcal{E}(k,\sigma,a)$. Mostrar (con ayuda de un programa de representación gráfica, si se quiere) y discutir cómo afecta a la energía de intercabio. Ayuda:

$$\int \mathrm{d}x\, x \ln\left|(1\pm x)^2 + a^2\right| = \frac{1}{2}\left\{4\left[1 - a\arctan\left(\frac{1\pm x}{a}\right)\right] - (x\mp 1)^2 + (x^2+a^2-1)\ln\left|(1\pm x)^2 + a^2\right|\right\}. \tag{2}$$

Ejercicio 3: Operador densidad
A partir de la normalización de la función de onda, $1 = \sum_{\mu,\sigma}\int \mathrm{d}\vec{r}|\psi_{\mu\sigma}(\vec{r})|^2$, se define el operador de densidad local $\hat{\rho}(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$.

i) Escribir los elementos de matriz $\rho_{\mu\nu}(\vec{r})$ del operador en segunda cuantización en una cierta base $\{|\mu\rangle\}$.
ii) Obtener transformada de Fourier del operador, $\hat{\rho}_\sigma(\vec{q})$, utilizando la base de ondas planas e interpretarlo en términos de las fluctuaciones de la carga.

Ejercicio 4: Apantallamiento de Thomas-Fermi
La susceptibilidad del gas de electrones viene dada por la función de Lindhard:

$$\chi_0(\vec{q},\omega) = \sum_{\vec{k},\sigma}\frac{f(\varepsilon_{\vec{k},\sigma}) - f(\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q},\sigma})}{\hbar\omega + \varepsilon_{\vec{k},\sigma} - \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q},\sigma} + i\eta}, \tag{3}$$

donde $f(E)$ es la función de Fermi y η es un parámretro positivo y arbitrariamente pequeño.

i) Calcular la constante dieléctrica $\epsilon(\vec{q},\omega{=}0)$ en el límte $\vec{q}\to 0$.
ii) Utilizando el resultado anterior, mostrar que el potencial inducido en el medio por una carge puntual e corresponde al potencial de Yukawa, $\phi(r) = \frac{e}{r}\mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{TF} r}$, donde κ_TF es el vector de ondas de Thomas-Fermi.
iii) Estimar la distancia típica en la que el apantallamiento es efectivo para un electrón en el nivel de Fermi.