

## FÍSICA DE LA MATERIA CONDENSADA

Hoja 5

### Ejercicio 1: Qubit singlete-triplete

Dado el hamiltoniano de dos puntos cuánticos (con un nivel cada uno):

$$\hat{H} = \sum_{i\sigma} \varepsilon_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} - \tau \sum_{\sigma} (\hat{c}_{1\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{2\sigma} + \hat{c}_{2\sigma}^{\dagger} \hat{c}_{1\sigma}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 U_{ij} \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{j\downarrow}, \quad (1)$$

donde  $U$  describe la repulsión coulombiana en cada el punto cuántico  $i$ . Tanto la energía del nivel de cada punto cuántico,  $\varepsilon_{i\sigma}$ , como el acoplo entre ambos,  $\tau$ , pueden ser controlados individualmente mediante potenciales externos. Suponiendo que  $U_{12} = 0$  y que  $U_{11} \gg U_{22}$  (de forma que podemos despreciar la ocupación de estados con dos electrones en  $i=1$ ). Mostrar que la separación energética de los estados  $|S_0\rangle = (|\uparrow, \downarrow\rangle - |\downarrow, \uparrow\rangle) / \sqrt{2}$  y  $|T_0\rangle = (|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) / \sqrt{2}$  se puede controlar externamente mediante  $\varepsilon \equiv \varepsilon_{1\sigma} - \varepsilon_{2\sigma}$ . Para ello, considerar únicamente los estados con dos electrones. ¿En qué condición (asumiendo  $U_{22} \gg \tau$ ) estarán los dos estados degenerados?

### Ejercicio 2: Conductancia térmica

En el formalismo de Landauer-Büttiker, las corrientes de calor en un conductor de dos terminales (con un único modo propagante) se escriben de la forma (para  $l \neq j$ ):

$$J_l = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE (E - \mu_l) \mathcal{T}(E) [f_l(E) - f_j(E)], \quad (2)$$

donde  $f_l(E) = (e^{(E-\mu_l)/k_B T_l} + 1)^{-1}$  es la distribución de Fermi correspondiente a la terminal  $l$  con un potencial químico  $\mu_l = \mu$  y una temperatura  $T_l$  y  $\mathcal{T}(E)$  es la probabilidad de transmisión del modo a través del conductor.

- Mostrar que las corrientes de calor no se conservan, en general.
- Considerando el caso  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  y  $T_2 = T$ , mostrar que, en el régimen lineal con  $T_1 = T + \delta T$  y  $\delta T \ll T$ , la conductancia térmica, definida como  $K_l = \partial J_l / \partial(\delta T)$  está acotada superiormente. ¿Cuál es la cota superior?

### Ejercicio 3: Efecto Hall cuántico

Considerar un conductor de cuatro terminales en el régimen de Hall cuántico en la que los electrones se propagan sin dispersión a lo largo de los estados de borde en el sentido antihorario. Las terminales también se ordenan en sentido antihorario. Entre las terminales 1 y 3 se inyecta una corriente (longitudinal)  $I = \frac{e^2}{h}(V_3 - V_1)$ , mientras que las terminales 3 y 4 sirven de voltímetros, tales que su potencial químico se adapta a las condiciones  $I_3 = 0$  e  $I_4 = 0$ , respectivamente. Suponiendo que estamos en el régimen lineal, mostrar que la resistencia Hall (transversal) está cuantizada  $R_K = (V_4 - V_2)/I = h/e^2$  (resistencia de von Klitzing).

### Ejercicio 4: Bloqueo de Coulomb en un punto cuántico

El hamiltoniano de un punto cuántico con un único nivel cuya energía es  $\varepsilon_{\sigma}$  se escribe:

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \hat{n}_{\sigma} + U \hat{n}_{\uparrow} \hat{n}_{\downarrow}, \quad (3)$$

donde  $U \gg k_B T$  es la repulsión coulombiana. El sistema está débilmente conectado a dos terminales electrónicas, L y R, mediante dos barreras de efecto túnel. La ocupación de los distintos estados de ocupación,  $|0\rangle$ ,  $|\sigma\rangle$ ,  $|\uparrow, \downarrow\rangle$  se calcula a partir de un sistema de ecuaciones para la matriz densidad del sistema (ecuación maestra):

$$\dot{\rho}_n = \sum_{m \neq n} \sum_l (\Gamma_{n \leftarrow m}^l \rho_m - \Gamma_{m \leftarrow n}^l \rho_n). \quad (4)$$

En el régimen de túnel secuencial, las tasas de transición en las que un electrón entra en el punto cuántico desde la terminal  $l$  vienen dadas por:  $\Gamma_{\sigma \leftarrow 0}^l = \gamma f(\varepsilon_\sigma - \mu_l)$  y  $\Gamma_{\uparrow \downarrow \leftarrow \sigma}^l = \gamma f(\varepsilon_{-\sigma} + U - \mu_l)$ , con  $\gamma \ll k_B T$ . Para las transiciones opuestas (un electrón sale del punto cuántico), hay que remplazar la función de Fermi  $f(E)$  por  $1 - f(E)$ .

- i) Obtener la ocupación de los estados del sistema en el límite estacionario  $\dot{\rho} = 0$ , teniendo en cuenta la normalización de la matriz densidad:  $\rho_0 + \rho_\uparrow + \rho_\downarrow + \rho_{\uparrow\downarrow} = 1$  y que, en ausencia de un campo magnético,  $\varepsilon_\uparrow = \varepsilon_\downarrow$  y, por tanto,  $\rho_\uparrow = \rho_\downarrow$ .

A partir de la expresión general de la corriente estacionaria de carga:

$$I_L = -e \sum_{\sigma} \left( \Gamma_{\sigma \leftarrow 0}^L \rho_0 - \Gamma_{0 \leftarrow \sigma}^L \rho_\sigma + \Gamma_{\uparrow \downarrow \leftarrow \sigma}^L \rho_\sigma - \Gamma_{\sigma \leftarrow \uparrow \downarrow}^L \rho_{\uparrow \downarrow} \right), \quad (5)$$

obtener la corriente generada por una diferencia de potencial  $eV = \mu_L - \mu \ll U$ , con  $\mu_R = \mu$ , en los dos casos siguientes según se varía la posición de  $\varepsilon_\sigma$ :

- ii)  $\varepsilon_\sigma + U - \mu \gg k_B T$   
 iii)  $\mu - \varepsilon_\sigma \gg k_B T$ .  
 iv) ¿Qué ocurre en el régimen intermedio?