**Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento**
**A. Einstein**

Se sabe que cuando la electrodinámica de Maxwell – tal como se suele entender actualmente – se aplica a cuerpos en movimiento, aparecen asimetrías que no parecen estar en correspondencia con los fenómenos observados. Pensemos, por ejemplo, en la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor. En este caso, el fenómeno que se observa depende solamente del movimiento relativo entre el conductor y el imán, mientras que de acuerdo a la interpretación común se deben distinguir claramente dos casos muy diferentes, dependiendo de cuál de los dos cuerpos se mueva. Si se mueve el imán mientras que el conductor se encuentra en reposo, al rededor del imán aparece un campo eléctrico con cierto valor para su energía. Este campo eléctrico genera una corriente en el lugar donde se encuentre el conductor. Pero si el imán está en reposo y el conductor se mueve, al rededor del imán no aparece ningún campo eléctrico sino que en el conductor se produce una fuerza electromotriz que en sí no corresponde a ninguna energía, pero da lugar a corrientes eléctricas que coinciden en magnitud y dirección con las del primer caso, suponiendo que el movimiento relativo es igual en cada uno de los casos bajo consideración.

Otros ejemplos de esta índole así como los intentos infructuosos para constatar un movimiento de la Tierra con respecto al "medio de propagación de la luz" permiten suponer que no solamente en mecánica sino también en electrodinámica ninguna de las propiedades de los fenómenos corresponde al concepto de reposo absoluto. Más bien debemos suponer que para todos los sistemas de coordenadas, en los cuales son válidas las ecuaciones mecánicas, también tienen validez las mismas leyes electrodinámicas y ópticas, tal como ya se ha demostrado para las magnitudes de primer orden. Queremos llevar esta suposición (cuyo contenido será llamado de ahora en adelante "principio de la relatividad") al nivel de hipótesis y además introducir una hipótesis adicional que solamente a primera vista parece ser incompatible con el principio de la relatividad. Dicha hipótesis adicional sostiene que la luz en el espacio vacío siempre se propaga con cierta velocidad $V$ que no depende del estado de movimiento del emisor. Basándonos en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo, estas dos hipótesis son suficientes para derivar una electrodinámica de cuerpos en movimiento que resulta ser sencilla y libre de contradicciones. La introducción de un "éter" resultará ser superflua puesto que de acuerdo a los conceptos a desarrollar no es necesario introducir un "espacio en reposo absoluto", ni tampoco se asocia un vector de velocidad a ninguno de los puntos del espacio vacío en los que se llevan a cabo procesos electromagnéticos.

La teoría a desarrollar se basa – como cualquier otra electrodinámica – en la cinemática del cuerpo rígido porque las afirmaciones de cualquier teoría involucran relaciones entre cuerpos rígidos (sistemas de coordenadas), relojes y procesos electromagnéticos. El que estas circunstancias no hayan sido consideradas en forma apropiada es la raíz de las dificultades con las que actualmente debe luchar la electrodinámica de cuerpos en movimiento.

## I. Cinemática

### § 1. Definición de simultaneidad

Supongamos un sistema de coordenadas en el cual se valen las ecuaciones mecánicas de Newton. A este sistema de coordenadas lo llamaremos "sistema en reposo" a fin de distinguirlo de otros sistemas que se introducirán más adelante y para precisar la presentación.

Si un punto material se encuentra en reposo con respecto a este sistema de coordenadas, su posición se puede determinar y expresar en coordenadas cartesianas mediante escalas rígidas, utilizando la geometría euclidiana.

Cuando queremos describir el *movimiento* de un punto material, especificamos los valores de sus coordenadas en función del tiempo. Será necesario tener en cuenta que una descripción matemática de esta índole tiene un sentido físico solamente cuando con anterioridad se ha aclarado lo que en este contexto se ha de entender bajo "tiempo". Debemos tener en cuenta que todas nuestras afirmaciones en las cuales el tiempo juega algún papel, siempre son afirmaciones sobre *eventos simultáneos*. Por ejemplo, cuando digo "Ese tren llega aquí a las 7," esto significa algo así como: "El momento en que la manecilla pequeña de mi reloj marca las 7 y la llegada del tren son eventos simultáneos."[1]

Podría parecer que todas las dificultades relacionadas con la definición

[1] Aquí no se discutirá la imprecisión que se encuentra implícita en el concepto de simultaneidad de dos eventos en (aproximadamente) el mismo lugar y que de igual manera se debe conciliar mediante una abstracción.

del “tiempo” se superarían si en lugar de “tiempo” utilizara “la posición de la manecilla pequeña de mi reloj.” De hecho, una definición de este tipo sería suficiente en caso de que se trate de definir un tiempo exclusivamente para el lugar en el cual se encuentra el reloj; no obstante, esta definición ya no sería suficiente en cuanto se trate de relacionar cronológicamente series de eventos que ocurren en lugares diferentes, o – lo que implica lo mismo – evaluar cronológicamente eventos que ocurren en lugares distantes del reloj.

No obstante, podríamos sentirnos satisfechos si evaluáramos cronológicamente los eventos mediante el reloj de un observador que se encuentra en el origen de coordenadas y le asigna la posición correspondiente de la manecilla del reloj a cada uno de los eventos a evaluar, en el momento en que recibe una señal de luz que proviene del evento y se propaga en el espacio vacío. Sin embargo, como lo demuestra la experiencia, una asignación de esta índole tiene la inconveniencia de no ser independiente del observador equipado con el reloj. Mediante la siguiente observación llegaremos a una especificación mucha más práctica.

Si en el punto $A$ del espacio se encuentra un reloj, un observador que se encuentre en $A$ puede evaluar cronológicamente los eventos en la vecindad inmediata de $A$, buscando las posiciones de la manecilla del reloj que correspondan simultáneamente a estos eventos. Si en el punto $B$ del espacio también se encuentra un reloj – queremos añadir “un reloj de exactamente la misma naturaleza como el que se encuentra en $A$” – también es posible realizar una evaluación cronológica de los eventos en la vecindad inmediata de $B$ mediante un observador que se encuentra en $B$. Sin embargo, sin especificaciones adicionales no es posible comparar cronológicamente el evento en $A$ con el evento en $B$; hasta ahora hemos definido un “tiempo A” y un “tiempo B”, pero no un “tiempo” común para $A$ y $B$. Este último tiempo se puede definir estableciendo *por definición* que el “tiempo” que necesite la luz para viajar de $A$ a $B$ sea igual al “tiempo” para pasar de $B$ a $A$. Supongamos que una señal de luz parte de $A$ hacia $B$ en el “tiempo A” $t_A$, llega a $B$ y se refleja de regreso hacia $A$ en el “tiempo B” $t_B$ y finalmente arriba al punto $A$ en el “tiempo A” $t'_A$. De acuerdo a la definición, los dos relojes estarán sincronizados si

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \ . \qquad (1)$$

Supongamos que es posible formular sin contradicciones esta definición de sincronización para un número arbitrario de puntos, y que en general las siguientes relaciones son válidas:

1. Si el reloj en $B$ está sincronizado con el reloj en $A$, entonces el reloj en $A$ está sincronizado con el reloj en $B$.

2. Si el reloj en $A$ está sincronizado con los relojes en $B$ y en $C$, entonces los relojes en $B$ y $C$ también estarán sincronizados entre sí.

De esta manera con ayuda de ciertos experimentos físicos (imaginarios) hemos establecido lo que se debe entender bajo relojes sincronizados que se encuentran en reposo en diferentes lugares y, por ende, obviamente hemos obtenido una definición de "simultáneo" y de "tiempo". El "tiempo" de un evento es el dato de un reloj que se encuentra en reposo en el mismo lugar y el mismo momento del evento; dicho reloj debe estar sincronizado, para todas las determinaciones del tiempo, con un reloj específico que se encuentre en reposo.

Además, basándonos en el experimento asumimos que la magnitud

$$\frac{2\overline{AB}}{t'_A - t_A} = V \tag{2}$$

es una constante universal (la velocidad de la luz en el espacio vacío).

Lo importante es que hemos definido el tiempo mediante un reloj que se encuentra en reposo con respecto a un sistema en reposo; debido a su correspondencia con un sistema en reposo, al tiempo que acabamos de definir le llamaremos "el tiempo del sistema en reposo".

## § 2. Sobre la relatividad de la longitud y el tiempo

Las siguientes reflexiones se basan en el principio de la relatividad y el principio de la constancia de la velocidad de la luz, los cuales formularemos de la siguiente manera.

1. Las leyes de acuerdo a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos no dependen de si estos cambios de estado se refieren a uno u otro de dos sistemas de coordenadas que se encuentran en movimiento relativo de traslación uniforme.

2. Cualquier rayo de luz se propaga en un sistema de coordenadas en "reposo" con cierta velocidad $V$, independientemente de si este rayo de luz ha sido emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. En este caso

$$\text{velocidad} = \frac{\text{trayectoria de la luz}}{\text{intervalo de tiempo}}\ , \tag{3}$$

donde el concepto de "intervalo de tiempo" se debe entender en el contexto de la definición presentada en § 1.

Consideremos una varilla rígida en reposo de longitud $l$, la cual se determina igualmente mediante una escala de medición en reposo. Imaginémonos ahora el eje de la varilla situado sobre el eje $X$ del sistema de coordenadas en reposo y supongamos que la varilla se traslada uniformemente (con velocidad $v$) y de forma paralela al eje $X$ en la dirección de crecimiento de la coordenada $x$. Ahora nos preguntamos cuál será la longitud de la varilla *en movimiento*, suponiendo que esta longitud se determina mediante las siguientes dos operaciones:

a) El observador se desplaza junto con la escala mencionada anteriormente y la varilla bajo consideración y efectúa la medición de la longitud superponiendo directamente la escala sobre la varilla, justamente de la misma manera como si la varilla, la escala y el observador se encontraran en reposo.

b) El observador determina los puntos del sistema en reposo en los cuales se encuentran los extremos de la varilla en determinado tiempo $t$, utilizando para ello relojes que no se mueven con respecto al sistema en reposo y han sido sincronizados de acuerdo al procedimiento del § 1. La distancia entre estos dos puntos, determinada mediante la escala en reposo que ya hemos utilizado en este caso, también es una longitud que se puede designar como la "longitud de la varilla".

De acuerdo al principio de la relatividad, la longitud a determinar en la operación a), que llamaremos "longitud de la varilla en el sistema en movimiento", debe ser igual a la longitud $l$ de la varilla en reposo.

La longitud a especificar en la operación b), que llamaremos "longitud de la varilla (en movimiento) en el sistema en reposo", será determinada en base a nuestros dos principios y se demostrará que su valor es diferente de $l$.

La cinemática de uso general asume tácitamente que las longitudes determinadas mediante las operaciones arriba mencionadas son exactamente iguales o, en otras palabras, desde el punto de vista geométrico un cuerpo rígido en movimiento en el momento $t$ se puede reemplazar completamente por el *mismo* cuerpo cuando se encuentra en *reposo* en alguna posición.

Supongamos además que en los extremos ($A$ y $B$) de la varilla se colocan relojes sincronizados con los relojes del sistema en reposo, es decir, en un instante dado sus indicaciones corresponden al "tiempo del sistema en reposo" en las posiciones donde resulte que se encuentren. Por lo tanto estos relojes están "sincronizados en el sistema en reposo".

Supongamos además que con cada reloj se mueve un observador y que estos observadores aplican a cada uno de los relojes el criterio establecido en § 1 para la sincronización de dos relojes. En el instante de tiempo[2] $t_A$ un rayo de luz parte de $A$, luego se refleja en el punto $B$ en el momento $t_B$ y regresa al punto $A$ al tiempo $t'_A$. Teniendo en cuenta el principio de constancia de la velocidad de la luz obtenemos:

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{V - v} \tag{4}$$

y

$$t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{V + v}\ , \tag{5}$$

donde $r_{AB}$ representa la longitud de la varilla en movimiento, medida en el sistema en reposo. Por lo tanto los observadores que se desplazan con la varilla determinarán que los relojes no están sincronizados, mientras que los observadores en el sistema en reposo los declararían como sincronizados.

De esta manera vemos que no podemos asignar un significado *absoluto* al concepto de simultaneidad, y que dos eventos simultáneos desde el punto de vista de un sistema de coordenadas ya no se pueden interpretar como simultáneos desde un sistema de coordenadas que se mueve relativamente con respecto al sistema en reposo.

## § 3. Teoría de la transformación de coordenadas y del tiempo de un sistema en reposo a otro sistema que se encuentra en movimiento traslacional uniforme con respecto al primero

Consideremos dos sistemas de coordenadas en el espacio "en reposo", es decir, dos sistemas cada uno con tres líneas materiales rígidas que parten de un punto y son perpendiculares entre sí. Supongamos que los ejes $X$ de ambos sistemas coinciden y los ejes $Y$ y $Z$ son respectivamente paralelos. Consideremos una escala rígida y un número de relojes en cada uno de los sistemas y supongamos que tanto las escalas como también los relojes de ambos sistemas son, de manera respectiva, exactamente iguales.

Al punto de origen de uno de los sistemas de coordenadas ($k$) se le confiere una velocidad (constante) $v$ en la dirección de crecimiento de la coordenada

[2]En este caso "tiempo" significa "tiempo del sistema en reposo" y simultáneamente "indicación del reloj en movimiento que se encuentra en la posición que estamos considerando".

$x$ del otro sistema $(K)$ que se encuentra en reposo. Igualmente, la velocidad se transfiere a los ejes de coordenadas, la escala en cuestión y a los relojes. A cada tiempo $t$ del sistema en reposo $K$ le corresponde una posición determinada de los ejes del sistema en movimiento, y por razones de simetría estamos facultados para suponer que el movimiento de $k$ puede ser tal que los ejes del sistema en movimiento en el momento $t$ (siempre se designa con "$t$" el tiempo del sistema en reposo) son paralelos a los ejes del sistema en reposo.

Ahora imaginémonos que el espacio del sistema en reposo $K$ se mide mediante la escala en reposo, e igualmente el del sistema en movimiento $k$ mediante la escala que se mueve junto con él, y de esta manera se determinan las coordenadas $x,\ y,\ z$ y $\xi,\ \eta,\ \zeta$, respectivamente. El tiempo $t$ del sistema en reposo se determina para todos los puntos del sistema mediante los relojes que se encuentran en reposo en dicho sistema y con la ayuda de señales de luz tal como se describió en § 1; de igual forma el tiempo $\tau$ del sistema en movimiento se determina para todos los puntos del sistema, en el cual se hallan relojes en reposo relativo con respecto al mismo sistema, utilizando el método mencionado en § 1 de señales de luz entre los puntos donde se encuentran dichos relojes.

Para cada sistema de valores $x,\ y,\ z,\ t$, el cual determina completamente la posición y el tiempo de un evento en el sistema en reposo, corresponde un sistema de valores $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \tau$ que fija dicho evento con respecto al sistema $k$. Ahora el problema a resolver consiste en encontrar el sistema de ecuaciones que relaciona estas magnitudes.

En primer lugar es claro que las ecuaciones deben ser *lineales* debido a las propiedades de homogeneidad que le asignamos al espacio y al tiempo.

Si fijamos que $x' = x - vt$, es claro que a un punto en reposo en el sistema $k$ le corresponde cierto sistema de valores $x',\ y,\ z$ que es independiente del tiempo. Primero determinaremos $\tau$ como función de $x',\ y,\ z$ y $t$. A tal fin debemos expresar en forma de ecuaciones el hecho de que $\tau$ no es nada más que el compendio de los datos de los relojes en reposo en el sistema $k$, los cuales han sido sincronizados de acuerdo a la regla especificada en § 1.

Supongamos que desde el origen del sistema $k$ se emite un rayo de luz en el momento $\tau_0$ a lo largo del eje $X$ hacia $x'$ y desde allí en el momento $\tau_1$ se refleja hacia el origen de coordenadas a donde llega en el momento $\tau_2$.

Entonces se debe cumplir que

$$\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1 \tag{6}$$

o incluyendo los argumentos de la función $\tau$ y aplicando el principio de la constancia de la velocidad de la luz en el sistema en reposo:

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right)\right]$$
$$= \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right) .$$

Tomando a $x'$ infinitamente pequeño, de esta última ecuación obtenemos:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{V-v} + \frac{1}{V+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{1}{V-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}\,, \tag{7}$$

o

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'} + \frac{v}{V^2 - v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0\,. \tag{8}$$

Debemos anotar que en lugar del origen de coordenadas podríamos haber seleccionado cualquier otro punto como punto de salida del rayo de luz y, por lo tanto, la ecuación recién obtenida se cumple para todos los valores de $x',\ y,\ z$.

Considerando que desde el punto de vista del sistema en reposo la luz siempre se propaga con la velocidad $\sqrt{V^2 - v^2}$ a lo largo de los ejes $Y$ y $Z$, un análisis similar aplicado a esto ejes nos lleva a:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = 0\,,$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = 0\,.$$

Puesto que $\tau$ es una función *lineal*, de estas ecuaciones obtenemos

$$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right)\,, \tag{9}$$

donde $a$ es por el momento una función desconocida $\varphi(v)$ y por brevedad suponemos que en el origen de $k$, $\tau = 0$ cuando $t = 0$.

Con ayuda de estos resultados es fácil determinar las magnitudes $\xi$, $\eta$, $\zeta$, expresando mediante ecuaciones que la luz (tal como lo exige el principio de constancia de la velocidad de la luz en conexión con el principio de la relatividad) también se propaga en el sistema en movimiento con velocidad $V$. Para un rayo de luz que en el momento $\tau = 0$ se emite en la dirección de crecimiento de $\xi$ tenemos que:

$$\xi = V\tau \,, \tag{10}$$

o

$$\xi = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \,. \tag{11}$$

Pero con respecto al origen de $k$ el rayo de luz se desplaza con la velocidad $V - v$, cuando se mide en el sistema en reposo, de tal manera que:

$$\frac{x'}{V - v} = t \,. \tag{12}$$

Si reemplazamos este valor de $t$ en la ecuación para $\xi$, obtenemos

$$\xi = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}x' \,. \tag{13}$$

Si consideramos rayos de luz propagándose a lo largo de los otros ejes, de forma análoga encontramos

$$\eta = V\tau = aV\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right) \,, \tag{14}$$

donde

$$\frac{y}{\sqrt{V^2 - v^2}} = t \,; \quad x' = 0 \,; \tag{15}$$

es decir,

$$\eta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}y \tag{16}$$

y

$$\zeta = a\frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}z \,. \tag{17}$$

Introduciendo el valor de $x'$, resulta

$$\begin{aligned}
\tau &= \varphi(v)\beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) , \\
\xi &= \varphi(v)\beta(x - vt) , \\
\eta &= \varphi(v)y , \\
\zeta &= \varphi(v)z ,
\end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \tag{18}$$

y $\varphi$ es por ahora una función desconocida de $v$. Si no se impone ninguna condición sobre la posición inicial del sistema en movimiento ni sobre el punto cero de $\tau$, se debe agregar una constante aditiva en la parte derecha de estas ecuaciones.

Ahora debemos demostrar que desde el punto de vista del sistema en movimiento todo rayo de luz se propaga con la velocidad $V$, si este es el caso en el sistema en reposo, como lo hemos supuesto. Esto es necesario debido a que aún no hemos demostrado que el principio de constancia de la velocidad de la luz es compatible con el principio de la relatividad.

En el tiempo $t = \tau = 0$, cuando ambos sistemas de coordenadas poseen un origen común, se emite una onda esférica que se propaga en el sistema $K$ con velocidad $V$. Si $(x, y, z)$ representa un punto abarcado por esta onda, entonces

$$x^2 + y^2 + z^2 = V^2 t^2 . \tag{19}$$

A esta expresión le aplicamos nuestras ecuaciones de transformación y tras un cálculo sencillo obtenemos:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = V^2 \tau^2 . \tag{20}$$

Por lo tanto, en el sistema en movimiento la onda bajo consideración también es una onda esférica con velocidad de propagación $V$. De esta manera se demuestra que nuestros dos principios básicos son compatibles entre sí.

En las ecuaciones de transformación que hemos derivado aparece una función desconocida $\varphi$ de $v$ que determinaremos ahora.

A tal fin introducimos un tercer sistema de coordenadas $K'$ que con respecto al sistema $k$ se encuentra en un estado de movimiento traslacional paralelamente al eje $\Xi$, de tal manera que su origen de coordenadas se desplaza con velocidad $-v$ a lo largo del eje $\Xi$. Supongamos que en el momento $t = 0$ todos los tres orígenes de coordenadas coinciden y que para $t = x = y = z = 0$ el tiempo $t'$ del sistema $K'$ es igual a cero. Sean $x',\ y',\ z'$, las coordenadas medidas en el sistema $K'$. Utilizando dos veces nuestro sistema de ecuaciones de transformación obtenemos:

$$\begin{aligned}
t' &= \varphi(-v)\beta(-v)\left\{\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right\} = \varphi(v)\varphi(-v)t\,, \\
x' &= \varphi(-v)\beta(-v)\{\xi + v\tau\} = \varphi(v)\varphi(-v)x\,, \\
y' &= \varphi(-v)\eta \qquad\qquad\qquad\;\; = \varphi(v)\varphi(-v)y\,, \\
z' &= \varphi(-v)\zeta \qquad\qquad\qquad\;\; = \varphi(v)\varphi(-v)z\,.
\end{aligned}$$

Puesto que las relaciones entre $x',\ y',\ z'$ y $x,\ y,\ z$ no contienen el tiempo $t$, los sistemas $K$ y $K'$ se encuentran en reposo uno con respecto al otro y es claro que la transformación de $K$ a $K'$ debe ser la transformación idéntica. Por lo tanto:

$$\varphi(v)\varphi(-v) = 1\,. \tag{21}$$

Ahora nos preguntamos cuál es el significado de $\varphi(v)$. Consideremos el intervalo del eje $H$ localizado entre $\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0$ y $\xi = 0,\ \eta = l,\ \zeta = 0$. Este intervalo del eje $H$ corresponde a una varilla que se mueve perpendicularmente a su eje con la velocidad $v$ con respecto al sistema $K$. Los extremos de la varilla en el sistema $K$ tiene las coordenadas:

$$x_1 = vt\,, \quad y_1 = \frac{l}{\varphi(v)}\,, \quad z_1 = 0 \tag{22}$$

y

$$x_2 = vt\,, \quad y_2 = 0\,, \quad z_2 = 0\,. \tag{23}$$

Por lo tanto, la longitud de la varilla medida en $K$ es $l/\varphi(v)$; de esta forma hemos hallado el significado de la función $\varphi$. Por razones de simetría es evidente que la longitud de una varilla, medida en el sistema en reposo, que se mueve perpendicularmente a su eje depende solamente de la velocidad y no de la dirección y el sentido del movimiento. Entonces, la longitud, medida en el sistema en reposo, de la varilla en movimiento no varía si se intercambia $v$ por $-v$. En consecuencia tenemos:

$$\frac{l}{\varphi(v)} = \frac{l}{\varphi(-v)}\,, \tag{24}$$

o

$$\varphi(v) = \varphi(-v)\,. \tag{25}$$

A partir de esta relación y de la encontrada anteriormente se deriva que $\varphi(v) = 1$ y, consecuentemente, las ecuaciones de transformación se convierten en

$$\begin{aligned} \tau &= \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)\,, \\ \xi &= \beta(x - vt)\,, \\ \eta &= y\,, \\ \zeta &= z\,, \end{aligned}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,. \tag{26}$$

## § 4. Significado físico de las ecuaciones obtenidas en lo referente a cuerpos rígidos y relojes en movimiento

Consideremos una esfera rígida[3] de radio $R$ que está en reposo con respecto al sistema $k$ y cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas de $k$. La ecuación para la superficie de esta esfera que se mueve con velocidad $v$ con respecto a $K$ es:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2\,. \tag{27}$$

Al tiempo $t = 0$ la ecuación de esta superficie en coordenadas $x,\ y, z$ se expresa como:

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2\,. \tag{28}$$

[3]Es decir, un cuerpo que posee forma de esfera cuando se examina en reposo.

Si en un sistema en reposo un cuerpo rígido tiene la forma de una esfera, en un sistema en movimiento, visto desde el sistema en reposo, tendrá la forma de un elipsoide de rotación con los ejes

$$R\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\,, \quad R\,, \quad R\,. \tag{29}$$

Mientras que las dimensiones $Y$ y $Z$ de la esfera (y por lo tanto también de cualquier cuerpo rígido de forma arbitraria) no resultan afectadas por el movimiento, la dimensión $X$ aparece reducida en la relación $1 : \sqrt{1-(v/V)^2}$, es decir, se hace mayor a medida que aumenta $v$. En el caso $v = V$ todos los objetos en movimiento, vistos desde un sistema en reposo, se transforman en figuras planas. A velocidades superiores a la de la luz nuestro análisis pierde todo sentido. Por lo demás, en los siguientes análisis veremos que físicamente la velocidad de la luz en nuestra teoría juega el papel de las velocidades infinitamente grandes.

Es claro que los mismos resultados son válidos para cuerpos en reposo en el sistema de "reposo"', vistos desde un sistema en movimiento uniforme.

Además, imaginémonos uno de los relojes que están en la capacidad de indicar el tiempo $t$ cuando se encuentra en reposo con respecto a un sistema en reposo, y el tiempo $\tau$ cuando se encuentra en reposo con respecto a un sistema en movimiento. Supongamos que dicho reloj está localizado en el origen de coordenadas de $k$ y está ajustado de tal manera que indica el tiempo $\tau$. ¿Qué tan rápido marcará el tiempo este reloj, si se observa desde el sistema en reposo?

Entre las cantidades $x$, $t$ y $\tau$ que se refieren a la posición de este reloj tenemos, obviamente, las siguientes ecuaciones:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \tag{30}$$

y

$$x = vt\,. \tag{31}$$

Por lo tanto

$$\tau = t\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2} = t - \left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)t\,, \tag{32}$$

de donde se deduce que la indicación del reloj (vista desde el sistema en reposo) por cada segundo se retrasa $(1 - \sqrt{1-(v/V)^2}$ segundos, es decir, $\frac{1}{2}(v/V)^2$ segundos, si nos olvidamos de las correcciones iguales o superiores al cuarto orden.

De lo anterior se deriva la siguiente consecuencia particular. Si en los puntos $A$ y $B$ de $K$ existen relojes sincronizados, que se encuentran en reposo con respecto al sistema en reposo, y movemos el reloj de $A$ con velocidad $v$ a lo largo de la línea que une $A$ con $B$, al llegar al punto $B$ los relojes ya no estarán sincronizados, sino que el reloj desplazado de $A$ hasta $B$ mostrará, con respecto al reloj que desde el principio se encontraba en $B$, un retraso de $\frac{1}{2}tv^2/V^2$ segundos, donde $t$ es el tiempo que necesita el reloj para pasar de $A$ a $B$.

Inmediatamente se ve que este resultado también es válido cuando el reloj se desplaza desde $A$ hasta $B$ a lo largo de una línea poligonal arbitraria, incluso cuando los puntos $A$ y $B$ coinciden.

Si suponemos que el resultado demostrado para una línea poligonal es válido también para una curva de curvatura continua, obtenemos la siguiente conclusión: Si en $A$ se encuentran dos relojes sincronizados y movemos uno de ellos con velocidad constante a lo largo de una curva cerrada hasta regresar al punto $A$, utilizando para ello un tiempo de $t$ segundos, entonces al arribar al punto $A$ el reloj desplazado mostrará un retraso de $\frac{1}{2}t(v/V)^2$ segundos, con respecto al reloj que ha permanecido inmóvil. De aquí concluimos que un reloj de balance situado en el ecuador de la Tierra debe andar más despacio, por una cantidad muy pequeña, que un reloj similar situado en uno de los polos y sujeto a las mismas condiciones.

## § 5. Teorema de adición de velocidades

Consideremos en el sistema $k$, que se mueve con velocidad $v$ a lo largo del eje $X$ del sistema $K$, un punto en movimiento de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \xi &= w_\xi \tau\,, \\ \eta &= w_\eta \tau\,, \\ \zeta &= 0\,, \end{aligned}$$

donde $w_\xi$ y $w_\eta$ son constantes.

Se pretende describir el movimiento del punto con respecto al sistema $K$. Si introducimos en las ecuaciones de movimiento del punto las magnitudes $x,\ y,\ z,\ t$ mediante las ecuaciones de transformación derivadas en § 3, obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} t\,, \\ y &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 + \frac{v w_\xi}{V^2}} w_\eta t\,, \\ z &= 0\,. \end{aligned}$$

Consecuentemente, en nuestra teoría la ley del paralelogramo para las velocidades es válida únicamente a primer orden de aproximación. Sea

$$\begin{aligned} U^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\,, \\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2 \end{aligned}$$

y

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{w_y}{w_x}\,; \tag{33}$$

entonces, $\alpha$ se debe considerar como el ángulo entre las velocidades $v$ y $w$. Un cálculo sencillo genera

$$U = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos\alpha) - \left(\frac{vw\sin\alpha}{V}\right)^2}}{1 + \frac{vw\cos\alpha}{V^2}}\,. \tag{34}$$

Es interesante anotar que $v$ y $w$ aparecen de forma simétrica en la expresión para la velocidad resultante. Si $w$ también tiene la dirección del eje $X$ (eje $\Xi$), obtenemos

$$U = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}\,. \tag{35}$$

De esta ecuación se deriva que de la combinación de dos velocidades, ambas menores que $V$, siempre resulta una velocidad menor que $V$. En efecto, si tomamos $v = V - \kappa$ y $w = V - \lambda$, donde $\kappa$ y $\lambda$ son positivas y menores que $V$, entonces:

$$U = V\frac{2V - \kappa - \lambda}{2V - \kappa - \lambda + \frac{\kappa\lambda}{V}} < V\,. \tag{36}$$

Además, se deriva que la velocidad de la luz $V$ no se puede alterar al combinarla con una "velocidad menor que la de la luz". En este caso se obtiene

$$U = \frac{V + w}{1 + \frac{w}{V}} = V\,. \tag{37}$$

Para el caso en que $v$ y $w$ tienen la misma dirección también hubiéramos podido obtener la fórmula para $U$ aplicando dos de las transformaciones descritas en § 3. Si además de los sistemas $K$ y $k$ utilizados en § 3 introducimos un tercer sistema de coordenadas $k'$ que se desplaza paralelamente al sistema $k$ y cuyo origen se mueve con velocidad $w$ sobre el eje $\Xi$, obtenemos ecuaciones que relacionan a $x,\ y,\ z,\ t$ con las cantidades correspondientes en $k'$ y que se diferencian de las encontradas en § 3 solamente porque en lugar de "$v$" aparece la magnitud

$$\frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}\,. \tag{38}$$

De aquí se deduce que, como debe ser, dichas transformaciones paralelas forman un grupo.

Hemos derivado las dos leyes necesarias de la cinemática que corresponden a nuestros dos principios y ahora procederemos a mostrar su aplicación en electrodinámica.

## II. Electrodinámica

### § 6. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío. Sobre la naturaleza de la fuerza electromotriz que aparece con el movimiento en un campo magnético.

Supongamos que las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el espacio vacío son válidas en el sistema en reposo $K$ de forma tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\,, & \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\,,\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\,, & \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\,,\\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\,, & \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\,,
\end{aligned}$$

donde $(X, Y, Z)$ representa el vector de la fuerza eléctrica y $(L, M, N)$ el de la fuerza magnética.

Si aplicamos a estas ecuaciones la transformación desarrollada en § 3, refiriendo los efectos electromagnéticos al sistema de coordenadas que se mueve con velocidad $v$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \xi}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial L}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \zeta} - \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)}{\partial \tau} &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)}{\partial \xi},
\end{aligned} \tag{39}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}, \tag{40}$$

El principio de la relatividad exige ahora que las ecuaciones de Maxwell-Hertz en el espacio vacío también se cumplan en el sistema $k$, si se cumplen en el sistema $K$, es decir, que los vectores de la fuerza eléctrica y magnética – $(X', Y', Z')$ y $(L', M', N')$ – del sistema en movimiento $k$, que se definen respectivamente mediante sus efectos ponderomotrices sobre la masa eléctrica y magnética, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{V}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{V}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{V}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Evidentemente, los dos sistemas de ecuaciones derivados para el sistema $k$ deben representar lo mismo debido a que ambos sistemas de ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell-Hertz para el sistema $K$. Además, puesto que las ecuaciones de ambos sistemas coinciden, con la excepción de los símbolos que representan los vectores, deducimos que las funciones que aparecen en las posiciones correspondientes en las ecuaciones deben coincidir, con la excepción de un factor $\psi(v)$ que es común para todas las funciones de uno de los sistemas y es independiente de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, pero eventualmente dependiente de $v$. Por lo tanto se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X\,, & L' &= \psi(v)L\,, \\ Y' &= \psi(v)\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)\,, & M' &= \psi(v)\beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)\,, \\ Z' &= \psi(v)\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)\,, & N' &= \psi(v)\beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Si calculamos el inverso de este sistema de ecuaciones, primero resolviendo el sistema recién obtenido y, segundo, aplicando las ecuaciones a la transformación inversa (de $k$ a $K$), caracterizada mediante la velocidad $-v$, y consideramos que los dos sistemas de ecuaciones obtenidos de esta manera deben ser idénticos, obtenemos:

$$\varphi(v) \cdot \varphi(-v) = 1\,. \tag{42}$$

Además, por razones de simetría tenemos[4]

$$\varphi(v) = \varphi(-v)\,; \tag{43}$$

por lo que

$$\varphi(v) = 1\,, \tag{44}$$

y nuestras ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X' &= X\,, & L' &= L\,, \\ Y' &= \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right)\,, & M' &= \beta\left(M + \frac{v}{V}Z\right)\,, \\ Z' &= \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right)\,, & N' &= \beta\left(N - \frac{v}{V}Y\right)\,. \end{aligned}$$

[4]Por ejemplo, si $X = Y = Z = L = M = 0$ y $N \neq 0$, es claro por razones de simetría que cuando $v$ cambia su signo sin alterar su valor numérico, entonces $Y'$ también debe cambiar su signo sin alterar su valor numérico.

Para interpretar estas ecuaciones notemos lo siguiente: Supongamos que una carga eléctrica puntual tiene el valor "uno" en el sistema en reposo $K$, es decir, cuando se encuentra en reposo con respecto al sistema en reposo ejerce una fuerza de una dina sobre una cantidad de electricidad igual que se encuentra a una distancia de un cm. De acuerdo al principio de la relatividad, esta carga eléctrica también tiene el valor "uno" en el sistema en movimiento. Si esta cantidad de electricidad se encuentra en reposo con respecto al sistema en reposo, de acuerdo a la definición, el vector $(X, Y, Z)$ es igual a la fuerza que actúa sobre ella. Si la cantidad de electricidad se encuentra en reposo con respecto al sistema en movimiento (por lo menos en el momento relevante), entonces la fuerza que actúa sobre ella, medida en el sistema en movimiento, es igual al vector $(X', Y', Z')$. Consecuentemente, las primeras tres de las ecuaciones presentadas arriba se pueden expresar mediante palabras de las siguientes dos maneras:

1. Si una carga eléctrica, puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, además de la fuerza eléctrica sobre ella actúa una "fuerza electromotriz" que, si despreciamos los términos multiplicados por las potencias de $v/V$ de orden dos y superiores, es igual al producto vectorial de la velocidad de la carga unitaria por la fuerza magnética, dividido por la velocidad de la luz (modo de expresión antiguo).

2. Si una carga eléctrica, puntual y unitaria se mueve en un campo electromagnético, la fuerza que actúa sobre ella es igual a la fuerza eléctrica presente en la posición de la carga, la cual se obtiene mediante una transformación del campo a un sistema de coordenadas en reposo con respecto a la carga eléctrica (modo de expresión moderno).

La analogía es válida para "fuerzas magnetomotrices". Vemos que en la teoría desarrollada la fuerza electromotriz juega solamente el papel de concepto auxiliar cuya introducción se debe al hecho de que las fuerzas eléctricas y magnéticas no existen independientemente del estado de movimiento del sistema de coordenadas.

Además es claro que ahora deja de existir la asimetría mencionada en la introducción que aparecía cuando considerábamos corrientes producidas por el movimiento relativo de un imán y un conductor. Adicionalmente, las cuestiones relaciones con el "sitio" de las fuerzas electrodinámicas electromotrices (máquinas unipolares) no tienen ningún sentido.

## § 7. Teoría del principio de Doppler y de la aberración

Supongamos que muy lejos del origen de coordenadas del sistema $K$ se encuentra una fuente de ondas electrodinámicas, las cuales en la parte del espacio que contiene el origen se representan con un grado suficiente de aproximación mediante las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
X &= X_0 \sin\Phi\,, & L &= L_0 \sin\Phi\,, & & \\
Y &= Y_0 \sin\Phi\,, & M &= M_0 \sin\Phi\,, & \Phi &= \omega\left(t - \frac{ax+by+cz}{V}\right)\,. \\
Z &= Z_0 \sin\Phi\,, & N &= N_0 \sin\Phi\,, & &
\end{aligned}
$$

Las magnitudes $(X_0, Y_0, Z_0)$ y $(L_0, M_0, N_0)$ son los vectores que determinan la amplitud de la onda y $a, b, c$, son los cosenos direccionales de las normales de la onda.

Queremos investigar la constitución de estas ondas cuando son examinadas por un observador que se encuentra en reposo con respecto al sistema en movimiento $k$. Aplicando las ecuaciones de transformación para las fuerzas eléctricas y magnéticas derivadas en § 6 y las ecuaciones de transformación para las coordenadas y el tiempo halladas en § 3, encontramos directamente las siguientes relaciones

$$
\begin{aligned}
X' &= X_0 \sin\Phi'\,, & L' &= L_0 \sin\Phi'\,, \\
Y' &= \beta\left(Y_0 - \frac{v}{V}N_0\right)\sin\Phi'\,, & M' &= \beta\left(M_0 + \frac{v}{V}Z_0\right)\sin\Phi'\,, \\
Z' &= \beta\left(Z_0 + \frac{v}{V}M_0\right)\sin\Phi'\,, & N' &= \beta\left(N_0 - \frac{v}{V}Y_0\right)\sin\Phi'\,,
\end{aligned}
$$

$$
\Phi' = \omega'\left(\tau - \frac{a'\xi + b'\eta + c'\zeta}{V}\right)\,, \tag{45}
$$

donde hemos utilizado que

$$
\omega' = \omega\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)\,, \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
a' &= \frac{a - \frac{v}{V}}{1 - a\frac{v}{V}}\,, \\
b' &= \frac{b}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)}\,,
\end{aligned}
$$

$$c' \quad = \quad \frac{c}{\beta\left(1 - a\frac{v}{V}\right)} \, .$$

De la ecuación para $w'$ se deriva lo siguiente: Si con respecto a una fuente de luz de frecuencia $\nu$, situada a una distancia infinita, un observador se mueve con velocidad $v$ de forma tal que la línea de conexión "fuente de luz - observador" forma el ángulo $\varphi$ con la velocidad de un observador asociado con un sistema de coordenadas que se encuentra en reposo con respecto a la fuente de luz, la frecuencia $\nu'$ de la luz percibida por el observador está dada mediante la ecuación:

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\varphi \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \, . \tag{47}$$

Este es el principio de Doppler para velocidades arbitrarias. Para $\varphi = 0$ la ecuación toma la forma clara

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}} \, . \tag{48}$$

Vemos que –a diferencia de la opinión común– para $v = -\infty$ corresponde $\nu = \infty$.

Si denominamos como $\varphi'$ el ángulo entre la normal de la onda (dirección del rayo) en el sistema en movimiento y la línea de conexión "fuente de luz – observador", la ecuación para $a'$ toma la forma

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi} \, . \tag{49}$$

Esta ecuación representa la ley de la aberración en su forma más general. Si $\varphi = \pi/2$, la ecuación toma la forma sencilla

$$\cos\varphi' = -\frac{v}{V} \, . \tag{50}$$

Todavía debemos encontrar la amplitud de la onda tal como aparece en el sistema en movimiento. Si denominamos como $A$ y $A'$ a la amplitud de la fuerza eléctrica o magnética medida en el sistema en reposo y en movimiento, respectivamente, obtenemos la ecuación

$$A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\cos\varphi\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \, , \tag{51}$$

que para $\varphi = 0$ se simplifica y toma la forma

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}\,. \tag{52}$$

De las ecuaciones desarrolladas se deriva que para un observador que se aproxima con velocidad $V$ hacia una fuente de luz, dicha fuente debería mostrar una intensidad infinita.

## § 8. Transformación de la energía de rayos de luz. Teoría de la presión de radiación ejercida sobre un espejo perfecto.

Puesto que $A^2/8\pi$ es la energía de la luz por unidad de volumen, de acuerdo al principio de la relatividad debemos considerar a $A'^2/8\pi$ como la energía de la luz en el sistema en movimiento. Por lo tanto $A'^2/A^2$ sería la relación entre la energía de cierto complejo de luz “medida en movimiento” y la “medida en reposo”, si el volumen del complejo de luz medido en $K$ fuera el mismo que el medido en $k$. Sin embargo, este no es el caso. Si $a, b, c$ son los cosenos direccionales de la normal de la onda de luz en el sistema en reposo, a través de los elementos de superficie de la esfera

$$(x - Vat)^2 + (y - Vbt)^2 + (z - Vct)^2 = R^2 \tag{53}$$

que se desplaza con la velocidad de la luz no pasa ninguna energía. Por consiguiente, podemos decir que esta superficie encierra permanentemente el mismo complejo de luz. Nos preguntamos cuál es la cantidad de energía que encierra esta superficie desde el punto de vista del sistema $k$, es decir, la energía del complejo de luz con respecto al sistema $k$.

Desde el punto de vista del sistema en movimiento la superficie esférica es una superficie elipsoidal cuya ecuación para el tiempo $\tau = 0$ es

$$\left(\beta\xi - a\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\eta - b\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 + \left(\zeta - c\beta\frac{v}{V}\xi\right)^2 = R^2\,. \tag{54}$$

Si $S$ es el volumen de la esfera y $S'$ el volumen del elipsoide, un cálculo sencillo muestra que

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}\,. \tag{55}$$

Entonces, si designamos a la energía encerrada por esta superficie como $E$, cuando se mide en el sistema en reposo, y como $E'$, cuando se mide en el sistema en movimiento, obtenemos la fórmula

$$\frac{E'}{E} = \frac{\frac{A'^2}{8\pi} S'}{\frac{A^2}{8\pi} S} = \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,, \tag{56}$$

que para $\varphi = 0$ se simplifica y transforma en

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}}}\,. \tag{57}$$

Es notable que la energía y la frecuencia de un complejo de luz varían con el estado de movimiento del observador de acuerdo a la misma ley.

Sea el plano de coordenadas $\xi = 0$ una superficie reflectora perfecta sobre la cual se reflejan las ondas planas consideradas en el último parágrafo. Nos preguntamos cuál es la presión de la luz ejercida sobre la superficie reflectora, y la dirección, frecuencia e intensidad de la luz después de la reflexión.

Supongamos que el rayo incidente está definido mediante las magnitudes $A$, $\cos\varphi$, $\nu$ (con respecto al sistema $K$). Desde el punto de vista de $k$ las magnitudes correspondientes son:

$$A' = A\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,, \tag{58}$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{V}}{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}\,, \tag{59}$$

$$\nu' = \nu\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\,. \tag{60}$$

Si relacionamos el proceso con el sistema $k$, para la luz reflejada obtenemos

$$\begin{aligned} A'' &= A'\,, \\ \cos\varphi'' &= -\cos\varphi'\,, \\ \nu'' &= \nu'\,. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la transformación inversa para el sistema en reposo $K$ para la luz reflejada encontramos que

$$A''' = A'' \frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = A \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\,, \tag{61}$$

$$\cos\varphi''' = \frac{\cos\varphi'' + \frac{v}{V}}{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''} = -\frac{\left(1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2\right)\cos\varphi - 2\frac{v}{V}}{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}\,, \tag{62}$$

$$\nu''' = \nu'' \frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi''}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \nu \frac{1 - 2\frac{v}{V}\cos\varphi + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2}\,. \tag{63}$$

La energía (medida en el sistema en reposo) que incide sobre el espejo por unidad de área y unidad de tiempo está dada evidentemente por $A^2(V\cos\varphi - v)$. La energía que sale del espejo por unidad de área y unidad de tiempo es $A'''^2/8\pi(-V\cos\varphi''' + v)$. De acuerdo al principio de la energía, la diferencia entre estas dos expresiones corresponde al trabajo ejercido por la presión de la luz en una unidad de tiempo. Si igualamos este trabajo al producto $Pv$, donde $P$ es la presión de la luz, obtenemos

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}\,. \tag{64}$$

De acuerdo con el experimento y con los resultados de otras teorías, a primer orden de aproximación obtenemos

$$P = 2\frac{A^2}{8\pi}\cos^2\varphi\,. \tag{65}$$

Todos los problemas sobre óptica de cuerpos en movimiento se pueden resolver aplicando el método utilizado aquí. Lo importante es que la fuerza eléctrica y magnética de la luz, la cual resulta influenciada por un cuerpo en movimiento, se transforman a un sistema de coordenadas que se encuentra en reposo con respecto al cuerpo. De esta manera cualquier problema relacionado con óptica de cuerpos en movimiento se reduce a una serie de problemas sobre óptica de cuerpos en reposo.

## § 9. Transformación de las ecuaciones de Maxwell-Hertz considerando las corrientes de convección.

Comenzamos con las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\left\{u_x\rho + \frac{\partial X}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\frac{1}{V}\left\{u_y\rho + \frac{\partial Y}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{1}{V}\left\{u_z\rho + \frac{\partial Z}{\partial t}\right\} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{V}\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

donde

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \tag{66}$$

representa $4\pi$ veces la densidad eléctrica y $(u_x,\ u_y,\ u_z)$ es el vector de velocidad de la carga eléctrica. Si nos imaginamos las cargas eléctricas acopladas de forma invariable a pequeños cuerpos rígidos (iones, electrones), estas ecuaciones representan el fundamento electromagnético de la electrodinámica de Lorentz y de la óptica de cuerpos en movimiento.

Si estas ecuaciones son válidas en el sistema $K$ y las transformamos al sistema $k$ con la ayuda de las ecuaciones de transformación derivadas en § 3 y § 6, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V}\left\{u_\xi\rho' + \frac{\partial X'}{\partial \tau}\right\} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial L'}{\partial \tau} = \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta},\\
\frac{1}{V}\left\{u_\eta\rho' + \frac{\partial Y'}{\partial \tau}\right\} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial \tau} = \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{V}\left\{u_\zeta\rho' + \frac{\partial Z'}{\partial \tau}\right\} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial N'}{\partial \tau} = \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{V^2}} = u_\xi$$

$$\begin{aligned} \frac{u_y}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{V^2}\right)} &= u_\eta\,, \qquad \rho' = \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} = \beta\left(1 - \frac{v u_x}{V^2}\right)\rho \\ \frac{u_z}{\beta\left(1-\frac{u_x v}{V^2}\right)} &= u_\zeta\,. \end{aligned}$$

Puesto que – como se deduce del teorema de adición de velocidades (§ 5) – el vector $(u_\xi,\ u_\eta,\ u_\zeta)$ no es nada más que la velocidad de las cargas eléctricas en el sistema $k$, de esta forma se demuestra que, en base a nuestros principios cinemáticos, el fundamento electrodinámico de la teoría de Lorentz para la electrodinámica de cuerpos en movimiento está de acuerdo con el principio de la relatividad.

Además, quisiéramos anotar brevemente que de las ecuaciones desarrolladas se puede derivar con facilidad la siguiente ley importante: Si un cuerpo cargado eléctricamente se mueve de forma arbitraria en el espacio sin alterar su carga, cuando se observa desde un sistema de coordenadas que se desplaza junto con el cuerpo, entonces su carga también permanecerá constante cuando se observa desde el sistema en “reposo” $K$.

## § 10. Dinámica de un electrón (acelerado lentamente).

En un campo electromagnético se mueve una partícula puntual (que llamaremos electrón) provista de una carga eléctrica $\varepsilon$ y sobre su movimiento suponemos lo siguiente:

Si el electrón se encuentra en reposo en un momento dado, en los instantes de tiempo subsiguientes el movimiento se desarrolla de acuerdo a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X \\ \mu\frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon Y \\ \mu\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon Z\,, \end{aligned}$$

donde $x,\ y,\ z$ son las coordenadas del electrón y $\mu$ es su masa, siempre y cuando el movimiento sea lento.

En segundo lugar, supongamos que en cierto momento el electrón posee la velocidad $v$. Buscamos la ley de acuerdo a la cual se mueve el electrón en los instantes de tiempo inmediatos.

Sin alterar la generalidad del análisis podemos y queremos asumir que el electrón, en los momentos en que lo observamos, se encuentra en el origen de coordenadas y se mueve a lo largo del eje $X$ del sistema $K$ con velocidad $v$. Entonces es claro que en un momento dado ($t = 0$) el electrón se encuentra en reposo con respecto a un sistema de coordenadas que se desplaza paralelamente a lo largo del eje $X$ con velocidad $v$.

De la suposición descrita arriba en relación con el principio de la relatividad es claro que desde el punto de vista del sistema $k$ y para los momentos de tiempo subsiguientes (valores pequeños de $t$) el movimiento del electrón se describe mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \varepsilon X' \\ \mu\frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \varepsilon Y' \\ \mu\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \varepsilon Z' \,, \end{aligned}$$

donde las magnitudes $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$, $X'$, $Y'$, $Z'$ se refieren al sistema $k$. Si además fijamos que para $t = x = y = z = 0$ deba ser $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, entonces tienen validez las ecuaciones de transformación de §§ 3 y 6 de forma tal que obtenemos

$$\begin{array}{lll} \tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) , & & \\ \xi = \beta(x - vt) \,, & & X' = X \,, \\ \eta = y \,, & & Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) , \\ \zeta = z \,, & & Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) . \end{array}$$

Con ayuda de estas ecuaciones transformamos las ecuaciones de movimiento del sistema $k$ al sistema $K$ y obtenemos como resultado

$$(A) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta^2}X \,, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Y - \frac{v}{V}N\right) , \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{1}{\beta}\left(Z + \frac{v}{V}M\right) . \end{aligned} \right.$$

Asumiendo el punto de vista común nos preguntamos cuál es la masa "longitudinal" y "transversal" del electrón en movimiento. Primero escribimos las ecuaciones ($A$) en la forma

$$\begin{aligned}
\mu\beta^2\frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X = \varepsilon X', \\
\mu\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Y - \frac{v}{V}N\right) = \varepsilon Y', \\
\mu\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon\beta\left(Z + \frac{v}{V}M\right) = \varepsilon Z',
\end{aligned}$$

y luego notamos que $\varepsilon X'$, $\varepsilon Y'$, $\varepsilon Z'$ son las componentes de la fuerza ponderomotriz que actúa sobre el electrón, vistas desde un sistema que en ese momento se mueve junto con el electrón a la misma velocidad. (Esta fuerza se podría medir, por ejemplo, mediante una balanza de resorte que se encuentre en reposo en este último sistema.) Si ahora llamamos a esta fuerza simplemente "la fuerza que actúa sobre el electrón" y mantenemos la ecuación

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{fuerza} \tag{67}$$

y, además, decidimos que las aceleraciones deben ser medidas en el sistema en reposo $K$, de las ecuaciones mencionadas arriba obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{masa longitudinal} &= \frac{\mu}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}\right)^3}, \\
\text{masa transversal} &= \frac{\mu}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Naturalmente, si se utilizaran otras definiciones para la fuerza y la aceleración, encontraríamos otros valores para las masas. De aquí vemos que se debe ser muy cuidadoso cuando se comparan diferentes teorías del movimiento del electrón.

Nótese que estos resultados sobre la masa también son válidos para puntos materiales ponderables, porque un punto material ponderable se puede convertir en un electrón (en nuestro sentido), adicionándole una carga eléctrica *tan pequeña como se quiera.*

Ahora determinaremos la energía cinética del electrón. Si un electrón se mueve partiendo del reposo desde el origen de coordenadas del sistema $K$ a lo largo del eje $X$ bajo la acción de una fuerza electroestática $X$, es claro que la energía extraída del campo electroestático tiene el valor de $\int \varepsilon X dx$. Puesto que el electrón se debe acelerar lentamente y, por lo tanto, no debe emanar energía en forma de radiación, la energía extraída del campo electroestático se debe igualar a la energía de movimiento $W$ del electrón. Teniendo en cuenta que durante todo el proceso de movimiento bajo consideración se puede aplicar la primera de las ecuaciones $(A)$, obtenemos

$$W = \int \varepsilon X dx = \mu \int_0^v \beta^3 v dv = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\} . \tag{68}$$

Para $v = V$ la energía $W$ crece infinitamente. Como en nuestros resultados anteriores, velocidades superiores a la de la luz no tienen ninguna posibilidad de existencia.

En virtud del argumento mencionado arriba, esta expresión para la energía cinética también debe ser válida para masas ponderables.

Ahora enumeraremos las propiedades del movimiento del electrón que se derivan del sistema de ecuaciones $(A)$ y que podrían ser sometidas a experimentos:

1. De la segunda ecuación del sistema $(A)$ se deduce que una fuerza eléctrica $Y$ y una fuerza magnética $N$ actúan con la misma intensidad de deflexión sobre un electrón que se mueve con velocidad $v$, cuando se cumple que $Y = Nv/V$. Entonces vemos que de acuerdo a nuestra teoría es posible determinar la velocidad del electrón a partir de la relación entre la deflexión magnética $A_m$ y la deflexión eléctrica $A_e$, utilizando la ley

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{V} . \tag{69}$$

Esta relación puede ser probada en el experimento porque la velocidad del electrón también se puede medir directamente, por ejemplo, mediante campos eléctricos y magnéticos que oscilan rápidamente.

2. De la derivación de la energía cinética para el electrón se deduce que entre la diferencia continua de potencial y la velocidad adquirida por el electrón $v$ debe existir una relación de la forma

$$P = \int X dx = \frac{\mu}{\varepsilon} V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\} . \tag{70}$$

3. Calculemos el radio de curvatura $R$ de la trayectoria cuando existe (como única fuerza de deflexión) una fuerza magnética $N$ que actúa de forma perpendicular a la velocidad del electrón. De la segunda de las ecuaciones $(A)$ obtenemos

$$-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{v}{V}N \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2} \tag{71}$$

o

$$R = V^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}\,. \tag{72}$$

Estas tres relaciones representan una expresión completa para las leyes que debe cumplir el movimiento de un electrón, de acuerdo a la teoría presentada aquí.

Finalmente quisiera anotar que durante el trabajo realizado para analizar los problemas aquí presentados he contado con la fiel asistencia de mi amigo y colega M. Besso a quien agradezco por algunas sugerencias valiosas.

Berna, junio de 1905.

(Recibido el 30 de junio de 1905.)

---

**Sobre esta edición:**

La versión aquí presente es una traducción del artículo original publicado por Albert Einstein en idioma alemán bajo el título *“ Zur Elektrodynamik bewegter Körper”* en la revista *Annalen der Physik*, **17**, 891–921 (1905).
Esta traducción y su versión electrónica en PDF han sido elaboradas por Hernando Quevedo (ICN-UNAM, quevedo@nucleares.unam.mx) en abril de 2005. 