LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Fecha: 07/02/05

1. Objetivo de la práctica

Comprobar la ley de conservación de la energía mecánica mediante el disco de Maxwell

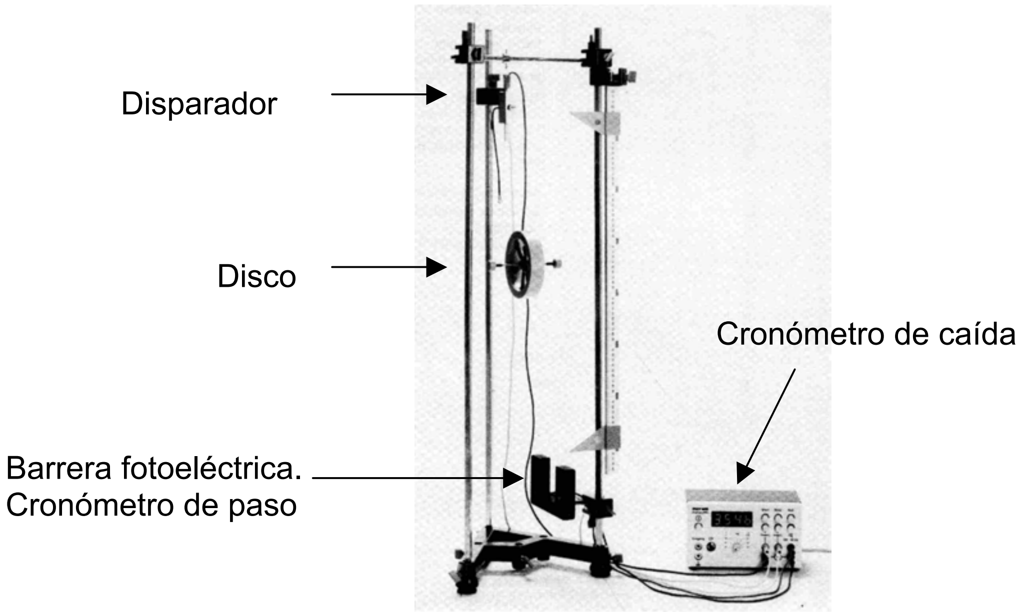

Fig. 1. Montaje para la comprobación de la ley de conservación de la energía mecánica.

2. Material

- Disco de Maxwell: m = (518±1)gr, r_e (eje) = (2,50±0,02) mm
- Soporte con dispositivo de enganche y disparador de cronómetro
- Cronómetro digital multifunción con resolución de 1 ms
- Barrera fotoeléctrica en horquilla, con un detector de parada de cronómetro, r_d (diafragma) = (1,15±0,05) mm, y cronómetro de tiempo de paso en segundos con resolución de 1 ms. (La luz es infrarroja de λ = 950 nm, área de reacción de ≅0,3 mm^2, tiempo de respuesta de ≅0,6 μs).
- Regla graduada en milímetros

3. Teoría

El disco de Maxwell consiste en una rueda cuyo eje sobresale bastante y desde el cual se puede colgar mediante dos hilos. Cuando los hilos están enrollados en el eje, bajo el peso del disco se empiezan a desenrollar, y el disco va aumentando tanto su velocidad lineal de caída, v, como la velocidad angular de rotación, ω, alrededor del eje. Se cumple además que la aceleración lineal de caída ***a*** es paralela al desplazamiento, y el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es perpendicular a ambos. La energía mecánica, E, del disco de Maxwell, de masa m y momento de inercia alrededor del eje I_z, se compone de la energía potencial $E_p = mgh$ que posee a la altura h y de las energías cinéticas de traslación $E_t = (1/2)mv^2$ y de rotación $E_r = (1/2)I_z\omega^2$ a esa misma altura h, es decir

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2 \qquad (1)$$

De acuerdo con la ley de conservación de la energía mecánica, el valor de E debe permanecer constante durante toda la caída del disco. Para comprobar esta ley, conviene hacer explícitas las dependencias temporales de las variables h, v, etc. Para lo cual resulta cómodo tomar como origen de energía potencial (y por tanto de h) el punto más alto desde el que empieza la caída. En ese punto se tendrá $E_p = 0$, y por debajo de ese punto E_p será menor, es decir negativa. Si llamamos $h(t)$ a la distancia recorrida durante la caída hasta el instante t, se escribirá $E_p(t) = -mgh(t)$. Por otra parte, como la velocidad lineal y la angular se relacionan por la fórmula $v(t) = \omega(t)\, r$, siendo r el radio del eje del disco, la expresión (1) se escribirá

$$E(t) = -mgh(t) + \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_z}{r^2}\right)[v(t)]^2 \qquad (2)$$

Además E debe ser una constante del movimiento y su derivada temporal debe ser nula, de modo que

$$0 = -mgv(t) + \left(m + \frac{I_z}{r^2}\right)v(t)\frac{dv(t)}{dt} \qquad (3)$$

de donde se obtiene inmediatamente la aceleración lineal de caída como

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{m}{m + \frac{I_z}{r^2}}\, g \qquad (4)$$

Nótese que esta aceleración es constante y menor que g (sería igual a g si el disco no girara). El resto de las variables se obtienen fácilmente mediante las fórmulas típicas del movimiento uniformemente acelerado. Como las condiciones iniciales de este movimiento son $h\,(t{=}0) = 0$ y $v\,(t{=}0) = 0$, tendremos

$$v(t) = at = \frac{mg}{m + \frac{I_Z}{r^2}}\, t \tag{5}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{m + \frac{I_Z}{r^2}}\, t^2 \tag{6}$$

y la relación adicional entre v y h

$$v(h) = \sqrt{2ah} \tag{7}$$

4. Montaje Experimental

La práctica consta de un soporte con un dispositivo de enganche del disco (una espiga que entra en un orificio del borde del disco). Dicho dispositivo actúa como disparador conectado al cronómetro digital que debe ponerse a cero antes de cada medida. Es decir, el dispositivo dispara el arranque del cronómetro en el momento en que se libera el disco, y empieza a contar el tiempo. El dispositivo de detección de llegada es la barrera fotoeléctrica situada en la horquilla, que hace que se pare el cronómetro cuando el eje del disco pasa a través de ella. El funcionamiento de la barrera fotoeléctrica se puede comprobar interrumpiendo con un papel la luz infrarroja que, saliendo de un brazo, llega a la fotocélula situada en el otro; esto hará que se ponga en marcha o se pare el cronómetro digital propio que lleva incorporado la barrera

Por otra parte, la velocidad instantánea del disco al final de la caída también se determina mediante la barrera fotoeléctrica de la horquilla que lleva incluido otro cronómetro digital propio. El tiempo indicado en el medidor, δt, corresponde al tiempo que transcurre desde que el eje penetra una pequeña una distancia de $0{,}6 \pm 0{,}1$ mm en el diafragma del detector, hasta que sólo le queda otro tanto ($0{,}6 \pm 0{,}1$ mm) para salir del mismo. De acuerdo con la Fig. 2, la distancia recorrida en ese tiempo será:

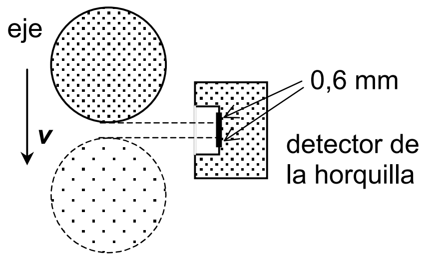

Fig. 2. Detalle de la sombra del eje sobre el detector.

$$\delta s = 2r_e + 2r_d - 2\text{x}0{,}6 = (6{,}1 \pm 0{,}3)\ \text{mm} \tag{8}$$

Esto nos permite determinar con buena aproximación la velocidad instantánea según la fórmula

$$v(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta s}{\delta t} \tag{9}$$

puesto que tanto δs como δt son cantidades pequeñas comparadas con la longitud de los hilos y el tiempo total de caída respectivamente.

Aspectos prácticos

Antes de empezar las medidas es importante familiarizarse con los puntos delicados del experimento. Se deben hacer ***pruebas previas cuidadosas*** antes de dejar caer el disco y tomar medidas válidas (téngase en cuenta que el disco lleva bastante energía cinética al final). Conviene:

a) Comprobar que el eje del disco esté ***horizontal*** cuando los hilos están totalmente desenrollados.

b) Al enrrollar los hilos ***no montar*** una vuelta de hilo encima de otra (para lo cual los hilos no están completamente verticales, sino que forman un cierto ángulo entre ellos), ya que esto descompensa el movimiento del disco y lo hace cabecear durante la caída. Entre otros problemas, el cabeceo hace prácticamente inservible la medida de la velocidad instantánea debido a lo aleatorio que resulta el valor de δt (Fig. 2); de hecho, esta medida es la que introduce mayor error.

c) En el momento del disparo hay que procurar que el disco esté completamente ***quieto y equilibrado***, que no se venza hacia algún lado porque se produciría el cabeceo y que no golpee al propio disparador después del disparo. Se mejora la reproducibilidad de las medidas si los hilos se enrrollan siempre con el mismo sentido de giro.

d) ***<u>Evítese que el disco golpee</u>*** a la horquilla (se dañaría ésta), y que el ***<u>hilo atraviese</u>*** (tenso o enrollado) la barrera de luz infrarroja, falsearía la medida relación entre δs y δt.

e) La horquilla debe estar perfectamente horizontal para que el tiempo de paso del eje proporcione la velocidad instantánea correcta.

5 Medidas a realizar

Tómense al menos seis valores de $h(t)$: 5 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm, 25 cm y 30 cm, y los correspondientes valores del tiempo de caída t y el tiempo de paso por la barrera $\delta(t)$, repitiendo la operación tres veces para cada valor de h para hacer un promedio razonable. Si se coloca el disco en el soporte de modo que una pareja de radios quede horizontal, la altura h se puede medir entre el centro de la varilla soporte y el centro del diafragma de la barrera fotoeléctrica.

6 Resultados

a) Una vez tomados los datos, en primer lugar se determina la aceleración lineal de la caída, a, que es una constante. Para ello, representando $v(t)$ en función de t, los valores deben distribuirse más o menos próximos a una recta cuya pendiente es a, de acuerdo con la fórmula (5). Igualmente, representando $h(t)$ en función de $t^2/2$ según (6) y $v^2(t)$ en función de $2h(t)$ según (7), los puntos también deben distribuirse a lo largo de sendas rectas, ambas de pendiente a. Determínese a y su error correspondiente a partir de las tres gráficas, primero visualmente y después por mínimos cuadrados. Dadas las condiciones iniciales experimentales (en $t = 0$ todas las variables son cero) las tres rectas deben pasar por el origen de coordenadas obligatoriamente por lo que es recomendable realizar el ajuste por mínimos cuadrados bajo esta condición.

b) Por lo comentado en *Aspectos prácticos*, el valor de δt es el de mayor error, incluso aunque varias medidas arrojen valores muy similares. Por ello, el valor con menor error de a debe ser el obtenido a partir de la fórmula (6) que no depende de δt. A partir de este valor de a, determínese el momento de inercia I_z y su error correspondiente, de acuerdo con la expresión (4).

c) Como, de acuerdo con las condiciones iniciales para (5), (6) y (7), tanto la energía potencial como la cinética son cero en $t = 0$, la energía total debe mantenerse constante e igual a cero en todas las medidas. Represéntense en una única gráfica en función de la altura h: *i*) la energía potencial E_p, *ii*) la energía cinética total ($E_C = E_t + E_r$), y *iii*) la energía mecánica total ($E = E_p + E_C$). Los puntos calculados para E se deben distribuirse aproximadamente sobre el eje h, mientras que E_p decrece con h (se hace cada vez más negativa) y E_C crece.

Aspectos adicionales (no son obligatorios)

1. Estímese el error que se comete al calcular la velocidad instantánea mediante los intervalos finitos de distancia, δs, y de tiempo de paso, δt, y compárese con otros errores de las medidas.
2. El cronómetro de mesa se para cuando el borde inferior del eje ha penetrado 0.6 mm en el diafragma de la barrera fotoeléctrica. Teniendo en cuenta la Fig. 2, estímese la corrección que se debe hacer al valor del tiempo de caída t dado por el cronómetro de mesa, debido a que la altura h se mide hasta el centro del citado diafragma.

7 Bibliografía

M. Alonso, E. J. Finn, “Física”, Vol. I : Mecánica. Addison Wesley Iberoamericana, 1986.

P. E. Tipler, “Física”, Reverté, 1994.- C. Kittel, “Mecánica”, Reverté, 1991.

Apéndice A

Modo de operación de los cronómetros

El cronómetro digital de mesa debe ponerse a cero antes de cada medida con el pulsador "NULL", y el control de escala debe estar en 10^1 segundo con lo que la resolución es de 1 ms. Este cronómetro se dispara al soltar el mecanismo de enganche del disco de Maxwell, por lo que el mecanismo debe estar conectado a los bornes de arranque ("START"). Una vez disparado empieza a contar el tiempo y, para esta forma de operar, el botón rotulado como "INVERT" sobre los bornes "START" **no** debe estar pulsado. El dispositivo de detección de llegada es la barrera fotoeléctrica que contiene la horquilla, por lo que ésta se debe conectar también al cronómetro de mesa: el borne amarillo (“SALIDA”) y el común o tierra (“$\perp$”) de la horquilla con los bornes rotulados "STOP" en el cronómetro de mesa. El botón "INVERT" de esta columna **no** debe estar pulsado para que el cronómetro se pare al cerrar el circuito. Además, la horquilla se alimenta con la tensión de 5 V suministrada por el borne rojo del cronómetro de mesa. Nótese que en el cronómetro de mesa hay tres bornes de tierra que están conectados entre sí, mientras que en la horquilla sólo hay uno que se comparte.

El cronómetro digital que hay en la horquilla va asociado con la barrera fotoeléctrica, de modo que mide el tiempo en milisegundos durante el que se hace sombra a la luz infrarroja de la barrera (véase la Fig. 2). Para ello, el commutador sobre la horquilla debe estar en la posición "TIEMPO", y se debe poner a cero cada vez que se haya hecho sombra por cualquier motivo. El funcionamiento de este cronómetro es independiente del cronómetro de mesa.

Tabla 1. Tiempos, velocidades y energías para diferentes alturas
(Precisiones: regla, ± mm; cronómetro caída, ± s; cronómetro barrera, ± s)

h, m	t_1, s	t_2, s	t_3, s	$t_m \pm \Delta t_m$, s	$(t_m)^2 \pm \Delta(t_m)^2$ (s^2)	δt_1, s	δt_2, s	δt_3, s	$\delta t_m \pm \Delta(\delta t_m)$ (s)	$v \pm \Delta v$, m/s	$v^2 \pm \Delta(v^2)$ (m^2/s^2)	$E_p \pm \Delta E_p$, J	$E_C \pm \Delta E_C$, J	$E \pm \Delta E$, J