DINÁMICA DE ROTACIÓN DE UN SÓLIDO

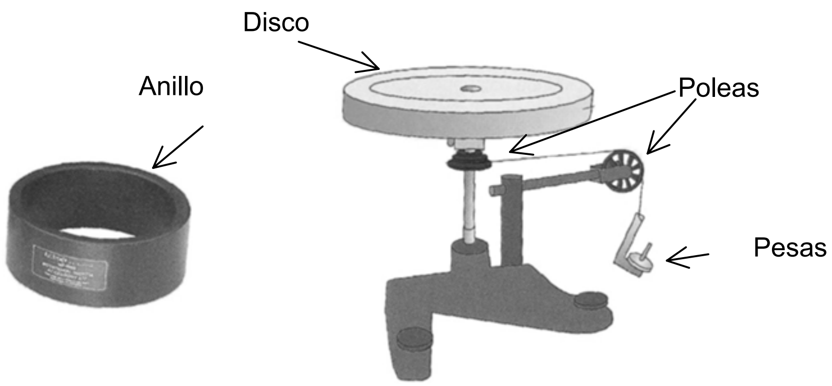
Fecha: 07/02/05

1. Objetivo de la práctica

Estudio de la ley de la dinámica de rotación de un sólido rígido alrededor de un eje fijo. Conservación del momento angular.

2. Material

- Soporte con disco giratorio, poleas y fotodetector para tacómetro
  Radios poleas: (12,4+0,2) mm; (19,1+0,2) mm
- Tacómetro hasta 200,00 rpm
- Cronómetro
- Anillo de inercia:
  $M = (1{,}431 \pm 0{,}001)$ kg; $R_{ext} = (63{,}8 \pm 0{,}3)$ mm; $R_{ext} = (53{,}8 \pm 0{,}3)$ mm
- Polea con soporte a la mesa, hilo y conjunto de pesas



3. Teoría

3.1. Ley de la dinámica de rotación de un sólido

La dinámica de rotación de un sólido rígido está regida por la ecuación fundamental siguiente:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\alpha \qquad (1)$$

donde τ es el momento total de las fuerzas aplicadas al sólido respecto al eje de giro, L es el momento angular respecto a dicho eje dado por

$$L = I\omega \qquad (2)$$

I es el momento de inercia y α es la aceleración angular del sólido, refiriéndose todas las magnitudes al mismo eje de rotación fijo. (Esta ley es similar a la de la dinámica de traslación, $F = m \cdot dp/dt = ma$, con las correspondientes magnitudes de traslación). La expresión (2) para el momento angular se obtiene de la correspondiente para un punto material dada por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. La dirección de $\mathbf{L}$ en el caso del sólido es la del eje de rotación y su sentido viene determinado por la regla del tornillo.

3.2. Ley de conservación del momento angular de un sólido

De acuerdo con (1), cuando el momento total de las fuerzas aplicadas es nulo se tiene $\tau = 0$, $dL = 0$, por lo que el momento angular es constante:

$$L = const \qquad (3)$$

Esta es la *ley de conservación del momento angular* aplicada en este caso a un sólido rígido.

Para comprobar esta ley, aquí se utilizará el sistema formado por dos sólidos cilíndricos. El primero es un disco de momento de inercia I_1 respecto a su eje, que se hace girar a la velocidad ω_{ini} alrededor de dicho eje. Por tanto, el momento angular del sistema respecto al eje será simplemente:

$$L_{ini} = I_1 \omega_{ini} \qquad (4)$$

El segundo cuerpo es un anillo pesado que se supone parado y concéntrico con el disco; su momento de inercia respecto al eje común es I_2. Si ahora se deja caer el anillo que no gira sobre el disco que gira, manteniéndose ambos concéntricos, el momento angular total no debe variar. Por tanto,

$$L_{ini} = L_{fin} = I_1 \omega_{ini} = (I_1 + I_2)\omega_{fin} \qquad (5)$$

donde L_{fin} y ω_{fin} son el momento angular y la velocidad angular después de acoplarse los dos objetos.

4 Medidas a realizar

4.1. Ley de la dinámica de rotación

a) Para esta parte de las medidas se requiere colocar el soporte con el disco, etc., al borde de la mesa, de modo que se pueda pasar un hilo desde la polea intermedia de las tres que hay debajo del disco, a la polea que hay con otro soporte independiente y que debe sujetarse al borde de la mesa. De este hilo se cuelga una masa m_1 = 12 g, y el hilo se enrolla sobre la polea intermedia para que la masa lo desenrrolle al caer. Para que la fuerza que ejerce el hilo sobre la polea intermedia sea exactamente igual al peso m_1g, el hilo debe estar tan horizontal como sea posible y, cuando está enrollado, debe estar dirigido de modo perpendicular al borde de la mesa y al eje de giro simultáneamente.

b) Con el hilo enrollado, se deja caer la masa m_1 partiendo del reposo (tanto m_1 como el disco) al mismo tiempo que se pone en marcha el cronómetro; la velocidad angular ω irá aumentando progresivamente. Se miden simultáneamente el tiempo empleado y la ω alcanzada antes de que el hilo se haya desenrollado completamente y se anotan los valores como en la Tabla 1. Como se trata de un movimiento circular uniformemente acelerado, la aceleración será $\alpha = \omega/t$. Se repite la misma medida tres veces para promediar el valor de α. Este valor de α, junto con el valor del momento $\tau = m_1gr$ (siendo r el radio efectivo de la polea), constituyen el primer punto de la función $\tau = I\alpha$.

c) Se repiten las medidas del parráfo anterior para m_2 = 16 g y 20 g.

d) Se repiten las medidas de b) y c) pero enrollando el hilo en la polea grande.

e) Con los datos de la Tabla 1, se dibuja la gráfica τ en función de α; de acuerdo con (1), los puntos deberán quedar distribuidos aproximadamente a lo largo de una recta, siendo el momento total igual a $\tau - \tau_{roz}$, donde τ_{roz} representa el momento debido a las fuerzas de rozamiento que se oponen a que gire el sistema. Por tanto, la ecuación de la recta será:

$$\tau = \tau_{roz} + I_1\alpha \tag{6}$$

Determinando la pendiente de esta recta (primero visualmente, posteriormente por mínimos cuadrados) se obtiene el valor del momento de inercia I_1 del disco y demás partes rotantes, así como el error de dicho valor. Y la ordenada en el origen de la recta determina el momento de rozamiento τ_{roz} del sistema y el error.

f) Se repiten los pasos b)-e) pero añadiendo el anillo de inercia sobre el disco; como el rozamiento aumenta con el peso, conviene aumentar las masas m_i, ahora se tomarán los valores: 16 g, 20 g y 24 g. De este modo se determina el momento de inercia total $I_1 + I_2$ y su error, de donde se obtiene el momento de inercia del anillo I_2 y su error restando el valor I_1 que se ha obtenido anteriormente.

g) Compárese el valor obtenido para I_2 con el valor calculado a partir de la geometría del anillo (véase la Bibliografía)

$$I_2 = \frac{1}{2} M (R_{ext}^2 + R_{int}^2) \qquad (7)$$

Ambos valores deben coincidir dentro del error experimental.

4.2. Conservación del momento angular

a) Para comprobar la ley de conservación del momento angular, se hace girar el sistema con el disco sólamente hasta alcanzar una ω de ~40 rpm.

b) El anillo pesado se sujeta en el aire con las dos manos de modo que quede centrado en la ranura circular del disco (para que al soltarlo gire concéntrico con el disco). En esta posición se mira atentamente al tacómetro y se anota mentalmente el valor justamente antes de soltar el anillo (éste valor será ω_{ini}), y después de haberlo soltado (éste será ω_{fin}). (Es recomendable pedir ayuda a un compañero para tomar estas medidas).

c) Comprúebese que se cumple la relación (5) utilizando los valores de I_1 e I_2 determinados previamente.

Bibliografía

1. M. Alonso, E. J. Finn, “Física”, Vol. I : Mecánica. Addison Wesley Iberoamericana, 1986.
2. P. E. Tipler, “Física”, Reverté, 1994.
3. C. Kittel, “Mecánica”, Reverté, 1991.

Tabla 1. Anotación de datos del disco

(Precisiones: cronómetro, $\pm$0,01 s; tacómetro, $\pm$0,01 rpm)

m_i (g) $\pm$0,1	r_{ef} (mm) $\pm$0,1	$\tau = m_i g r_{ef} \pm \Delta\tau$ N·m	t (s)	ω (rpm)	ω (s^{-1})	α_i (s^{-2})	$\alpha \pm \Delta\alpha$ (s^{-2})
12,0	12,4						
	19,1						
16,0	12,4						
	19,1						
20,0	12,4						
	19,1						
24,0	12,4						
	19,1						

Tabla 2. Anotación de datos del conjunto disco + anillo
(Precisiones: cronómetro, $\pm 0{,}01$ s; tacómetro, $\pm 0{,}01$ rpm)

m_i (g) $\pm 0{,}1$	r_{ef} (mm) $\pm 0{,}1$	$\tau = m_i g r_{ef} \pm \Delta\tau$ N·m	t (s)	ω (rpm)	ω (s^{-1})	α_i (s^{-2})	$\alpha \pm \Delta\alpha$ (s^{-2})
12,0	12,4						
	19,1						
16,0	12,4						
	19,1						
20,0	12,4						
	19,1						
24,0	12,4						
	19,1						

Apéndice A: Métodos alternativos para evaluar el rozamiento

A.1. Otro modo de evaluar el efecto del rozamiento en las medidas, consiste en medir el ritmo al que pierde velocidad angular, a causa del rozamiento, el sistema de giro usado en la práctica. Para ello, se hace girar manualmente la base que tiene el disco sin el anillo hasta que el tacómetro indique unas 100 rpm. Se deja que vaya disminuyendo libremente la velocidad angular pero anotando los valores del tacómetro cada 5 s hasta que se pare según se indica en la Tabla A1, y se representa gráficamente la velocidad angular en función del tiempo. Si el resultado no es una línea recta, el momento de rozamiento τ_{roz} no es constante, depende de la velocidad angular. Sin embargo, para el intervalo de valores de ω usado en las medidas anteriores, se puede aproximar a una recta tomando τ_{roz} como aproximadamente independiente de ω. Entonces la aceleración de frenado será simplemente $\alpha_{roz} = \omega/t$, de modo que

$$\tau_{roz} = I_1 \alpha_{roz} \qquad \text{(A1)}$$

que permite determinar τ_{roz} a partir del momento de inercia I_1 del disco y resto de partes rotantes, el cual se determina más adelante. Compárese con el τ_{roz} medido anteriormente. Repítase el procedimiento con el anillo sobre el disco para comprobar cómo varía τ_{roz} con el peso del objetoque gira.

A.2. Por último, también se puede evaluar el momento τ_{roz} variando la masa m_i hasta conseguir que ω sea constante (aceleración angular α cero). En esta situación, se verifica que $\tau_{roz} = m_i g$.

Tabla A1. Pérdidas por rozamiento

t, s	ω (disco), rpm	ω (+anillo), rpm
0		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		
45		
50		
55		
60		
65		
70		
75		
80		
85		
90		
95		
100		