ERRORES EN LAS MEDIDAS

(Conceptos elementales)

1. *Medida y tipos de errores*

Una tarea esencial en este Laboratorio de Física de Primero es familiarizarse con la ***medida*** de magnitudes físicas. Medir consiste en comparar una magnitud de un sistema dado con la misma de otro sistema que se toma como referencia o patrón (***unidad***). Por ejemplo, la longitud de un muelle, L_0, se compara con la unidad "milímetro" que suministra una regla graduada. Sea el ***resultado*** de una primera medida $L_1 = 54$ mm. Normalmente, al repetir la medida con la misma regla, se obtiene un valor diferente, por ejemplo $L_2 = 53$ mm. Esta diferencia se debe a causas accidentales (diferente apreciación de la persona, una vibración o movimiento inadvertido de la regla, etc.). Entonces se habla de ***error accidental*** o ***aleatorio***, que por su propia naturaleza será diferente cada vez; en este caso el resultado de medir una magnitud se debe dar como un valor promedio de todas las medidas. Si se utiliza una regla mal calibrada se obtiene un valor diferente, por ejemplo $L_3 = 55$ mm. En este caso se denomina ***error sistemático*** porque aparecerá superpuesto al aleatorio en todas la medidas en igual proporción. En este laboratorio supondremos la simplificación de que los errores sistemáticos se pueden despreciar frente a los aleatorios; salvo casos excepcionales, esta suposición es correcta. En cualquier caso, el intervalo ΔL en el que se puede encontrar la medida de L_0 se denomina ***error absoluto*** (en las mismas unidades de L_0), y el cociente entre el error absoluto y el valor medido, es decir $\Delta L/L$, se denomina ***error relativo*** (adimensional, frecuentemente en porcentaje).

2. *Precisión de los instrumentos*

El ejemplo de la Fig. 1 (una regla milimetrada) ilustra el concepto de precisión de un instrumento de medida ***analógico***. Si se desea medir con la regla la distancia entre los dos trazos largos, y suponiendo que se puede apreciar de modo fiable una división pequeña (1 mm), la medida estará comprendida entre 53 mm y 54 mm. Por tanto, se toma como precisión del instrumento la ***mitad de la división*** más pequeña apreciable, es decir ± 0.5 mm en modo de error absoluto y $\pm 0.5/53.5 = \pm 0.0093$ ($\sim 1\%$) en modo de error relativo. Estos comentarios sobre el instrumento "regla" se aplican de modo similar a los instrumentos analógicos en general (casos de la aguja de un cronómetro sobre la escala graduada circular o los cuadraditos del propio papel milimetrado en el que se hacen las gráficas).

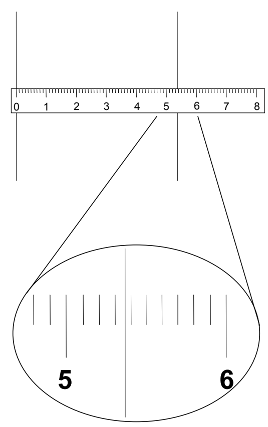

Fig. 1. Medida de una longitud con una regla

En el caso de ***instrumentos digitales***, el papel de las pequeñas divisiones analógicas lo desempeña el último dígito significativo (a menos que se especifique una precisión menor). Así, en el caso de un voltímetro que proporciona 4 dígitos, una lectura de voltaje de 10.53 V se debe interpretar como (10.53±0.01) V; la precisión absoluta será ±0.01 V (***último dígito***) y la relativa ±0.01/10.53 = ±0.00095 (~0.1%).

3. Errores accidentales

Una evaluación adecuada de los errores accidentales requiere el uso de métodos estadísticos. Para que el alumno se familiarice con los errores, en este primer contacto con la medida se le exige una ***evaluación doble*** en cada práctica, según se describe a continuación.

Ambos métodos se ilustran con el ejemplo de la Fig. 2, en el que se determina la aceleración de la gravedad g usando un péndulo. El periodo T de un péndulo simple viene dado en función de su longitud L por la expresión $T^2 = 4\pi^2 L/g$, por tanto escribiendo

$$L = \frac{g}{4\pi^2} T^2 \qquad (1)$$

y representando L en función de T^2, como se ha hecho en la Fig. 2, se obtiene una recta de pendiente $g/(4\pi^2)$ de cuyo valor se determina g. Las barritas verticales y horizontales que aparecen en cada punto indican el error obtenido en varias medidas de ese punto y se denominan ***barras de error***. En la figura se han representado todas iguales, y exageradas para mayor claridad.

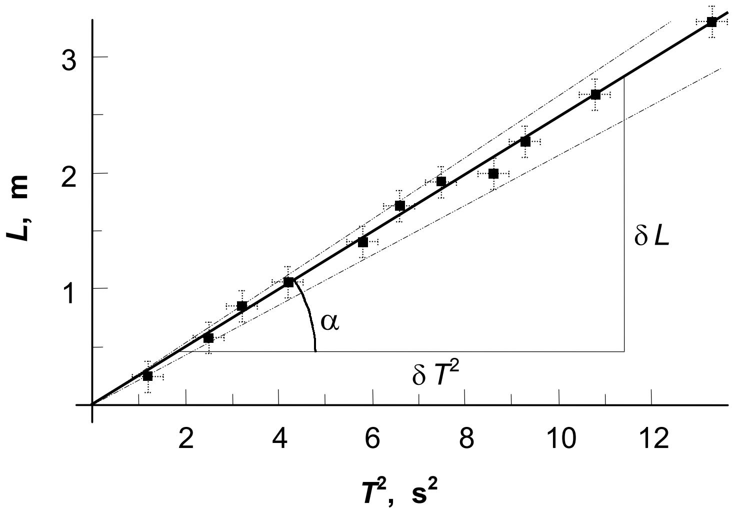

Fig. 2. Datos experimentales y ajuste visual de la ecuación (1).

3.1. Evaluación "visual"

El método que aquí llamamos *visual* consiste en trazar la recta por entre la nube de puntos medios mediante un "ajuste visual juicioso", es decir que el "peso" de los puntos que quedan por arriba de la recta sea similar al de los que quedan por debajo. La recta debe representar la tendencia de la nube de puntos, sin que tenga que pasar por uno o varios de los puntos necesariamente. El valor de g se obtiene ***de la pendiente*** medida sobre la recta y ***no de los puntos*** mediante

$$\text{Tan}\,\alpha = \frac{\delta L}{\delta T^2} = \frac{g}{4\pi^2} \qquad (2)$$

En el caso de esta figura se tiene g = 9,7385 m/s^2. A continuación se trazan dos rectas adicionales (de trazos finos en la Fig. 2) que representan las pendientes "máxima" y "mínima" posibles de la nube de puntos, de las que se obtienen de modo análogo g_{max} = 10,4532 m/s^2 y g_{min} = 8,8775 m/s^2, cuya diferencia es Δg = 1.5757 m/s^2. Tomando la mitad de este valor por arriba y la mitad por abajo, el error absoluto será Δg = ±0.7878 m/s^2. Como se han tomado valores extremos de la pendiente el valor máximo del error será Δg = ±0.8 m/s^2, prescindiendo de las cifras no significativas. Por tanto, consideraremos no representativas todas las cifras a partir de las décimas y el resultado debe escribirse así:

evaluación empírica **g = (9.7 ± 0.8) m/s²** (3)

siendo el error relativo máximo de **~8%**. Conviene insistir en que los ***decimales superfluos*** no deben escribirse, porque, además de innecesarios, confunden sobre la precisión real de la medida.

3.2. Evaluación analítica

Una vez realizada la evaluación visual anterior, y expresada la medida según se ha hecho en (3), se realiza la evaluación analítica por medio del método de **mínimos cuadrados**, un resumen del cual se da en el Apéndice 1. Este método permite obtener analíticamente el mejor ajuste posible de la recta haciendo mínimo el cuadrado de la diferencia entre el valor medido y el que da la recta. El resultado en este caso da (9.7944±0.2303) m/s^2, de modo que, tomando por prudencia el valor de 0.3 como error, escribiremos:

evaluación analítica **g = (9.8 ± 0.3) m/s²** (4)

siendo el error relativo de **~3%**. La razón de que ahora el error estimado sea menor, no es sólamente debido a la imprecisión de la apreciación visual. Se debe principalmente a que la definición de error usada en el ajuste por mínimos cuadrados no es la de error máximo, sino un *error cuadrático medio* (también llamado *error típico* o *estándar*) que no incluye los valores más alejados del centro del intervalo porque se consideran demasiado poco probables.

4. Propagación de errores en las fórmulas

Frecuentemente la magnitud que se desea conocer viene dada por una expresión matemática en la que aparecen varias magnitudes que hay que medir. Utlizando de nuevo el ejemplo del péndulo, el valor de la gravedad en la fórmula (1) viene dado en función de las dos magnitudes L y T por:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \tag{5}$$

El error en la medida de g se obtiene del siguiente modo. Consideremos en primer lugar que el error de L es despreciable (L es constante) y que el error ΔT es pequeño. Entonces, lo que varía g (su *error*) al variar T en ΔT se puede calcular con buena aproximación con la diferencial de (5), es decir,

$$\Delta g = \pm\left|\frac{dg(t)}{dT}\Delta T\right| = \pm 4\pi^2 L\frac{-2}{T^3}|\Delta T|; \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta g}{g} = \mp 2\frac{|\Delta T|}{T} \tag{6}$$

En el caso en que L también presente error $\pm\Delta L$ (también pequeño), el error $\pm\Delta g$ se puede obtener diferenciando la expresión (5) para $g(L,T)$ considerada como función de las dos variables L y T, es decir utilizando derivadas parciales,

$$\Delta g = \pm\left(\left|\frac{\partial g}{\partial L}\Delta L\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right|\right) = \pm\left(\left|\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta L\right| + \left|4\pi^2 L\frac{-2}{T^3}\Delta T\right|\right); \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta g}{g} = \pm\left|\frac{\Delta L}{L} + 2\frac{\Delta T}{T}\right| \tag{7}$$

Como la probabilidad de que el signo del error sea + ó – es aleatoria, en este caso en que aparece una suma es prudente tomar todos los signos positivos al considerar el error final.

Las reglas generales que se deducen de este método son las siguientes (compruébese que el ejemplo anterior las cumple): *a*) El error absoluto de la suma o diferencia es la suma de los errores absolutos de los sumandos, *b*) el error relativo de un producto o cociente es la suma de los errores relativos de los factores, y *c*) el de una potencia es igual al exponente por el error relativo de la base. Pero en caso de duda, es recomendable diferenciar la expresión correspondiente.

5. Procedimiento práctico

A la hora de realizar una Práctica, se recomienda seguir el siguiente procedimiento práctico:

A. Se lee detenidamente el ***<u>guión</u>***, para identificar los objetivos y conceptos físicos que aparecen y para tomar nota de las **precauciones** de carácter personal y sobre los instrumentos.

B. Se determina la ***<u>precisión de todos los instrumentos</u>*** de acuerdo con la sección ***2***.

C. Se realizan algunas ***<u>medidas de prueba</u>*** para familiarizarse con la técnica de medida, y para detectar los ***<u>aspectos delicados</u>*** del experimento y el ***<u>orden de magnitud</u>*** de los errores aleatorios. Frecuentemente éstos son mayores que la precisión de los instrumentos por lo que se desprecia el error instrumental; si fueran menores, será la precisión instrumental la que determine el error final de la medida.

D. Se hacen las ***<u>medidas que se piden</u>*** en el guión, atendiendo especialmente a los *aspectos delicados*, y se anotan en las ***<u>Tablas</u>*** que aparecen al final del guión.

E. Si son varias medidas repetidas, se hace la ***<u>media</u>*** y se calcula su error cuadrático medio. Si es una magnitud en función de otra que se va variando, se hace la ***<u>representación gráfica</u>*** correspondiente con los valores medios y las barras de error si procede, y se determinan su ***<u>valor y su error</u>***, primero visualmente y después por mínimos cuadrados.

F. Se comentan las incidencias de las medidas y se hace un ***<u>análisis físico</u>*** de los resultados.

<u>Conviene insistir</u> en que la estimación adecuada del error (pequeño o grande), la manera correcta de expresarlo y el juicio crítico de las medidas son objetivos más importantes en este Laboratorio que presentar medidas muy precisas. Por ello, la evaluación de los errores y el juicio crítico de las medidas constituyen una fracción importante de calificación a final del curso.

Apéndice 1: Evaluación analítica de los errores

1. *Conjunto de medidas de la misma cantidad*

En la gran mayoría de experimentos en Física, al medir la cantidad desconocida L_0, la probabilidad $p(L)$ de obtener un cierto valor L viene dada por la *función de Gauss* (*distribución normal* o *campana*, véase su forma en la Fig. A1), que se escribe:

$$p(L) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(L-\bar{L})^2/(2\sigma^2)} \qquad \text{(A1)}$$

Es fácil ver que el *máximo* de dicha función ocurre para $L = \bar{L}$; este valor también es el más probable y resulta ser el ***valor medio*** del conjunto L_j definido por:

$$\boxed{\bar{L} = \frac{\sum_{j=1}^{n} L_j}{n}} \qquad \text{(A2)}$$

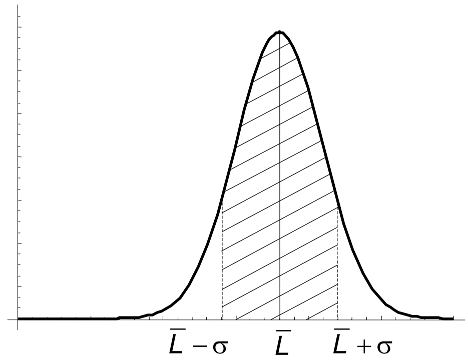

Fig. A1. Distribución normal de Gauss

donde n, que debe ser grande, es el número de veces que se ha medido L_0. La magnitud σ se denomina ***desviación típica*** o ***error cuadrático medio***, e indica lo que tiene que variar L respecto a $\bar{L}$ para que $p(L)$ sea $e^{-1/2}$ en (A1). Viene dada por la expresión:

$$\boxed{\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(L_j - \bar{L}\right)^2}{(n-1)}}} \qquad \text{(A3)}$$

En la Fig. A1 se ha indicado por medio de la región rayada, comprendida entre $\bar{L}-\sigma$ y $\bar{L}+\sigma$. El 68.3% de las medidas caen dentro de esta región, y el 99.7% entre $\bar{L}-2\sigma$ y $\bar{L}+2\sigma$. El valor $\Delta L = L - \bar{L} = \sigma$ se toma como una representación razonable del error absoluto de L_0 y es el que usaremos en el Laboratorio cuando sea necesario.

2. *El método de mínimos cuadrados*

Sean dos magnitudes físicas x e y relacionadas por una función lineal del tipo

$$y = ax + b \qquad \text{(A4)}$$

La representación gráfica de esta función es una línea recta de pendiente a y ordenada en el origen b. Si, tomadas una serie de medidas de x y de y, se tiene la sucesión de valores (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), ..., (x_n,y_n), las desviaciones δ_j de los valores experimentales respecto a los dados por la función (A4) serán

$$\begin{aligned} \delta_1 &= y_1 - (ax_1 + b) \\ \delta_2 &= y_2 - (ax_2 + b) \\ &. \\ \delta_n &= y_n - (ax_n + b) \end{aligned} \qquad \text{(A5)}$$

Sea $\varepsilon(a,b)$ la suma de los cuadrados de todas las desviaciones, es decir

$$\varepsilon(a,b)=\sum_{j=1}^{n}\delta_j^2(a,b) \tag{A6}$$

El método de ajuste de la recta a la distribución de puntos experimentales consiste en hacer mínima la función $\varepsilon\,(a,b)$. Los valores de a y de b que minimizan esta función son aquéllos que hacen cero las correspondientes derivadas parciales, es decir:

$$\frac{\partial\varepsilon(a,b)}{\partial a}=0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial\varepsilon(a,b)}{\partial b}=0 \tag{A7}$$

Estas dos condiciones forman un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y b cuya solución es:

$$\boxed{a=\frac{n\sum_{j=1}^{n}x_j y_j-\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)}{n\sum_{j=1}^{n}x_j^2-\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2}; \qquad b=\frac{\sum_{j=1}^{n}y_j-a\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}=\bar{y}-a\bar{x}} \tag{A8}$$

La estimación de los errores absolutos de a y b requiere un poco más de cálculo que se puede consultar en la bibliografía, y los valores dependen de los criterios usados para definirlos. En este Laboratorio usaremos las siguientes expresiones:

$$\boxed{\Delta a=\sqrt{\frac{n}{n-2}\,\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j-ax_j-b\right)^2}{n\sum_{j=1}^{n}x_j^2-\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)^2}}; \qquad \Delta b=\Delta a\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}{n}}} \tag{A9}$$

Los errores Δa y Δb reflejan asimismo el grado de correlación entre las variables x e y para ajustarse a la recta (A4). Aunque para cuantificar el grado de correlación es frecuente utilizar el llamado *coeficiente de correlación*, r, aquí sólo usaremos los Δa y Δb anteriores que tienen un significado físico directo.

En el caso de que para cada punto (x_j,y_j) se hayan tomado varias medidas y se tengan *barras de error* como las representadas en la figura 2, en (A8) y (A9) utilizaremos para (x_j,y_j) el valor medio de dichas medidas. Este es un procedimiento aproximado que, al no considerar el error de cada punto en las dos variables, simplifica el tratamiento. En muchos casos las variables del experimento son tales que para $x = 0$ se tiene necesariamente $y = 0$; en ese caso la recta debe pasar por el origen de coordenadas, y su pendiente viene dada por

$$\boxed{a=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j y_j}{\sum_{j=1}^{n}x_j^2};} \tag{A8}$$

Bibliografía

1. W. H. Westphal, *Prácticas de Física*, Ed. Labor, Madrid (1965).
2. J. Mathews and R. L. Walker, *Matemáticas para Físicos*, Ed. Reverté, Barcelona (1979).