UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Laboratorio de Física General
Primer Curso
(Mecánica)

ACELERACIÓN DE CORIOLIS

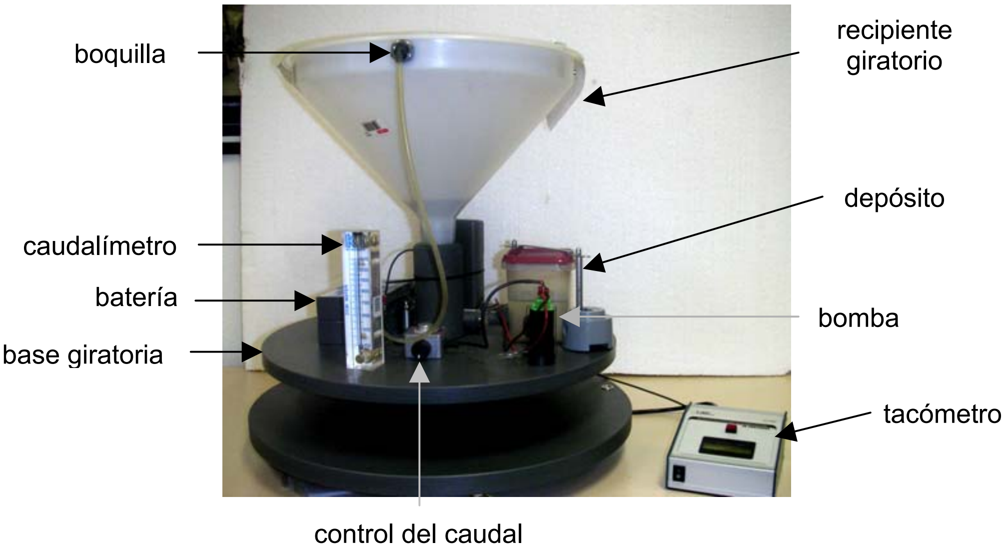
Fecha: 07/02/05

1. Objetivo de la práctica

Medida experimental de la aceleración de Coriolis en un sistema giratorio en el Laboratorio.

2. Material

- Sistema completo compuesto de:
  - Recipiente en forma de embudo (radio = 184±1 mm) con regla diametral y soporte giratorio sobre rodamiento de baja fricción
  - Circuito cerrado de circulación de agua con depósito, bomba y boquilla (radio = 1.5±0.1 mm) para chorro de agua
  - Batería de alimentación de la bomba a 12 V con regulación del voltaje
  - Tacómetro para medida de la velocidad de giro (revoluciones por minuto)
  - Batería de repuesto y cargador para la batería baja de carga



3. Teoría

Cuando un objeto se encuentra situado en un sistema de referencia que gira, se encuentra sometido a una cierta aceleración aunque no actúe sobre él ninguna fuerza. Si el objeto está en reposo en dicho sistema, está sometido a la llamada aceleración centrífuga (la que tiende a alejar el objeto del eje de giro). Si el objeto lleva una cierta velocidad v' en el sistema giratorio, además de a la aceleración centrífuga, se encuentra sometido a la *aceleración de Coriolis*, llamada así en honor a su descubridor en 1835, Gaspard Coriolis, ingeniero y matemático francés (1792-1843). Si además el objeto está sometido a la gravedad como es el caso del chorro de agua del montaje de esta práctica, la expresión general de la aceleración (véase la bibliografía) viene dada por la expresión

$$\vec{a}' = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (1)$$

En la figura 1 se ha indicado el significado y orientación de los diferentes vectores que aparecen en la expresión anterior.

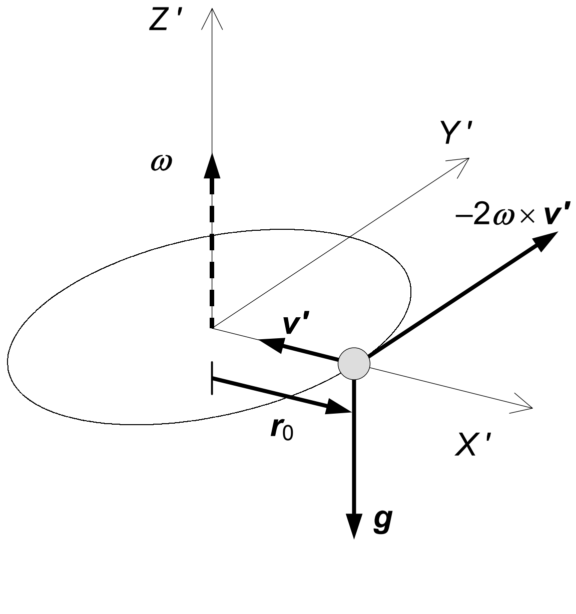


Figura 1.
Objeto m que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v'}$ a lo largo del eje X'. El sistema de ejes $X'Y'Z'$ gira con velocidad angular ω alrededor de la vertical del laboratorio, $\boldsymbol{g}$ es la gravedad y $-2\omega\times \boldsymbol{v'}$ es la aceleración de Coriolis que va separando al objeto del eje X' a lo largo de $+Y'$.

El sistema de referencia de la práctica gira alrededor de la vertical del Laboratorio, que tomaremos como eje Z, y el cuerpo (el chorro de agua) se mueve con una velocidad inicial horizontal v_0 dirigida hacia el eje de giro a lo largo del eje X (véase la Fig. 1). En estas condiciones, la gravedad sólo produce la caída del cuerpo hacia abajo pero de modo independiente del movimiento horizontal; por tanto no la consideraremos aquí. Además, teniendo en cuenta el pequeño radio (184 mm) de nuestro sistema experimental y que la velocidad de rotación ω es pequeña, la aceleración centrífuga del último término ($\omega^2 r$) se puede despreciar frente a la aceleración de Coriolis ($2\omega v'$). En la Fig. 1 se observa que esta aceleración hace que el objeto se desvíe en el sentido marcado por la rotación del sistema, de modo que no llega al origen de coordenadas como ocurriría en un sistema en reposo, sino un poco desplazado sobre el eje Y. Este desplazamiento $\Delta y'$ vendrá determinado por un movimiento uniformemente acelerado con la aceleración de Coriolis, es decir

$$\Delta y' = \frac{1}{2} a_{Coriol} t^2 = \frac{1}{2}(2\omega v_0)\left(\frac{r_0}{v_0}\right)^2 = \frac{\omega r_0^2}{v_0} \tag{2}$$

El tiempo t que tarda el objeto en llegar al eje Y se ha tomado igual al que tardaría si el sistema no girara, porque el desplazamiento $\Delta y'$ es suficientemente pequeño como para que la diferencia entre ambos se pueda despreciar. Conociendo tres de las cuatro magnitudes de la fórmula anterior, se puede determinar la cuarta.

4. Montaje

El montaje consiste en una plataforma giratoria sobre un rodamiento de baja fricción, que lleva todos los elementos necesarios para la circulación del agua. La circulación se produce con una pequeña bomba que toma el agua de un recipiente y la impulsa por un tubito de plástico flexible hasta el borde del embudo. Aquí hay una boquilla, de radio = 1.5±0.1 mm, que expulsa un chorro de agua horizontalmente y dirigido hacia el centro del embudo (el eje de giro) donde hay una regla milimetrada; la distancia entre la boquilla y el eje de giro o *radio de giro* es 184±1 mm. La regla está colocada en el diámetro perpendicular al chorro con objeto de que se puedan medir los desplazamientos del chorro producidos por el giro. La bomba está alimentada por una batería de 12 V y un regulador de intensidad que permite variar el caudal de agua y, por tanto, la velocidad del agua en la boquilla de salida. En la parte inferior del eje (la que queda por debajo de la plataforma con la batería, etc.) hay una rueda con aberturas radiales y un fotodiodo con fotodetector (*photo-gate*) que, con el medidor externo, permiten conocer las revoluciones por minuto a las que gira el sistema en cada momento, es decir funciona como un *tacómetro*.

<u>Observaciones</u>**.**

1. El recipiente de agua debe estar casi lleno (~3/4 del máximo) para que la bomba funcione correctamente (sin tomar aire, etc.).

2. En caso de que la batería se haya descargado, se debe poner a cargar en el cargador y substituirla por la de repuesto que debe estar bien cargada.

5. Medidas

5.1. En primer lugar se deben hacer ensayos preliminares del sistema para familiarizarse con su funcionamiento: variando el control de intensidad de la bomba de agua, notando cómo se desplaza el chorro al girar la plataforma, etc.

5.2. Para iniciar las medidas, con la plataforma parada, se subirá el caudal del agua, es decir su velocidad de salida, hasta que el chorro pase relativamente cerca de la parte inferior de la regla. El caudal que se haya fijado en este momento ya no se debe variar a lo largo de las medidas.

5.3. Ahora se hace girar la plataforma con la mano hasta que el chorro se desvíe 1 cm sobre la regla. En ese preciso momento se presiona el pulsador del tacómetro para dejar "congelada" la medida en el momento de pulsar, y se anotan (véase la Tabla 1) las revoluciones por minuto indicadas.

5.4. Se repite el paso anterior para deviaciones del chorro de 2 cm, 3 cm, 4 cm y 5 cm.

5.5. Si ahora se escribe la expresión (2) en la forma

$$\omega r_0^2 = v_0 \, \Delta y' \qquad (3)$$

se tiene la ecuación de una recta. Por tanto, representando los valores de ωr_0^2 anotados en la Tabla1 en función de los valores de $\Delta y'$ los puntos deben situarse aproximadamente sobre una recta de pendiente v_0. Determínese la velocidad de salida del agua v_0 a partir de dicha representación, además de su error; primero de modo gráfico y luego por mínimos cuadrados.

5.6. Dentro de los errores experimentales, este valor de v_0 debe coincidir con el que se obtiene a partir del caudal dado por el caudalímetro. Como el caudal es el volumen que sale por unidad de tiempo, $C = \Delta V/\Delta t$, la velocidad del agua v_0 está relacionada con C a través de la relación

$$C = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S\,\Delta l}{\Delta t} = S\,v_0 \qquad (4)$$

siendo S la sección de la boquilla de salida del agua y Δl la longitud recorrida por el chorro en el tiempo medido Δt. Compárese dicho valor con el estimado en 5.5. a partir de la aceleración de Coriolis.

Calibración del caudalímetro (sólo si fuera necesario). Se pesa un recipiente vacío, y con él se recoge una cierta cantidad de agua ΔV (~200 cm^3) directamente del chorro, midiendo el tiempo Δt que se emplea en recogerla con un cronómetro. Pesando de nuevo el recipiente con el agua y restando el peso del recipiente vacío se obtiene el peso del agua, y por tanto los cm^3 exactos que se han recogido en ese tiempo Δt. El caudal será simplemente $C = \Delta V/\Delta t$. (***PRECAUCION***: después de anotar el peso, el agua se debe volver a vaciar sobre el embudo para que el depósito recupere su nivel a ~3/4 por lo menos).

Bibliografía

Cualquier libro de Física General. Por ejemplo:

1. M. Alonso, E. J. Finn, "Física", *Física General, Vol. I (Mecánica)*. Addison Wesley Iberoamericana (1986).

Tabla 1. Anotaciones de la desviación y la frecuencia de rotación
Precisiones: regla ± (m); tacómetro ± (min^{-1})

$\Delta y'$± (10^{-2} m)	rpm± (min^{-1})	ω± (rad/s)	ωr_0^2± (m^2/s)	
1				
2				
3				
4				
5				

Apéndice A (no es obligatorio)

Ecuaciones completas para la aceleración de Coriolis

Dada la expresión (1) de la aceleración de Coriolis (véase también la Fig. 1)

$$\vec{a}' = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{A1}$$

usaremos las componentes del vector de posición $\vec{r}(t)$ escritas de la siguiente forma $\vec{r}(t)$ = [$x(t)$,$y(t)$,$z(t)$], de modo que bastará derivar con respecto al tiempo esta expresión para obtener los vectores velocidad y aceleración. Por tanto tendremos las siguientes expresiones:

$$\begin{gathered}\vec{r}(t) = \left[x(t), y(t), z(t)\right]; \quad \vec{v}' = \left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right]; \quad \vec{a}' = \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right]; \\ \vec{g} = \left[0,0,-g\right]; \quad \vec{\omega} = \left[0,0,\omega\right].\end{gathered} \tag{A2}$$

donde se han añadido los vectores constantes $\vec{g}$ y $\vec{\omega}$ (la disminución de ω por el rozamiento no se considera por ser muy lenta). Entonces la relación (1A) da lugar a las tres ecuaciones diferenciales lineales siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \omega^2 x(t) + 2\omega \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -2\omega \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{d^2z(t)}{dt^2} &= -g\end{aligned} \tag{A3}$$

Dada la forma en que se realizan las medidas en esta práctica, las condiciones iniciales que hay que añadir a las ecuaciones anteriores son:

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) &= \left[r_0,0,0\right] \quad (r_0\text{, radio de giro de la boquilla}) \\ \left[\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right]_{t=0} &= \left[-v_0,0,0\right] \quad (v_0\text{, velocidad de salida del agua})\end{aligned} \tag{A4}$$

La solución de (A3) con las condiciones (A4) resulta ser:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{r_0}{3}\left[4-\cos\left(\sqrt{3}\omega t\right)+\frac{\sqrt{3}v_0}{\omega r_0}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\omega t\right)\right] \\
y(t) &= -\frac{2}{3\omega}\left[v_0+r_0\omega^2 t-v_0\cos\left(\sqrt{3}\omega t\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\omega r_0\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\omega t\right)\right] \\
z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

***Re-análisis de los resultados*.**

Al utilizar las ecuaciones completas (A5), el tiempo de llegada del chorro a $x(t) = 0$ no es constante sino que aumenta poco a poco con ω_k. Al tener en cuenta este hecho, junto con la inclusión de la fuerza centrífuga, se debe obtener un ajuste de los datos más realista. Aunque desgraciadamente, el tratamiento de los resultados experimentales utilizando las ecuaciones completas (A5) no se puede hacer de modo analítico en general y es necesario el cálculo numérico.

Un tipo de comprobación es calcular el desplazamiento $y(t_k)$ correspondiente al tiempo t_k que tarda el agua en llegar a la posición $x(t_k) = 0$ para las distintas frecuencias ω_k y comparar con los experimentales $y_{k,\mathrm{exp}}$. Para ello se usan el valor medido de la velocidad v_0 obtenido a partir del caudal y las (A5), La obtención de t_k a partir de la ecuación $x(t_k) = 0$ debe hacerse numéricamente.

Otro tipo de comprobación consiste en determinar v_0 a partir de los valores experimentales $y_{k,\mathrm{exp}}$ para comparar con la velocidad medida a partir del caudal. Para ello, utilizando un valor inicial de prueba para v_0, se calculan numéricamente los valores $y(t_k)$ como se describe en el párrafo anterior, así como la suma de las diferencias con los valores experimentales, $[y(t_k) - y_{k,\mathrm{exp}}]^2$. Entonces, utilizando una subrutina de minimización, se varía el valor de v_0 hasta que se haga mínima la suma anterior.