Física II. ONDAS

1. Noción de onda.

Las ondas nos rodean, están por todas partes. Si hablas y alguien escucha es por la transmisión de **ondas de sonido**, si escuchas la radio o ves la tele es gracias a la transisión de **ondas electromagnéticas**, los terremotos también se propagan como **ondas sísmicas** y etc, etc...
Para entender el concepto de onda es útil pensar en las **ondas mecánicas**. Las ondas de sonido y las sísmicas son ejemplos de **ondas mecánicas**, en contraposición a las ondas electromagnéticas. Las ondas mecánicas son movimientos colectivos de un sistema **compuesto por muchos elementos conectados entre sí**. En concepto de **elemento** del sistema es amplio. Por ejemplo, si ponemos muchos muelles conectados unos con otros, cada muelle será un elemento. Si perturbamos un muelle, su movimento se transmite al resto formando una onda. En el caso de un fluido (el aire, el agua), los elementos pueden verse como pequeños subvolúmenes del fluido. Lo importante es que exista un **medio** a través del cual pueda transmitirse el movimiento, o la perturbación inicial que genera la onda. Asi pues una onda necesita:

- Una perturbación inicial sobre el sistema.
- Un medio de transmisión entre los elementos que componen el sistema.

1.1. Ondas transversales y longitudinales

Una onda es el movimento resultante del conjunto de movimientos individuales de todos los elementos del sistema, acoplados entre sí. Por ejemplo si agitamos verticalmente un trozo de cuerda atada por un extremo, el movimiento del primer trocito de cuerda será vertical y se comunicará al segundo trocito, que está siguiendo la dirección horizontal de la cuerda. Así sucesivamente. Este es un ejemplo de **onda transversal** porque mientras el movimiento de los elementos del sistema es vertical, la onda se comunica en dirección horizontal. Es decir, la dirección de perturbación de cada elemento es **transversal** a la de propagación de la onda.
En el caso del sonido las cosas son distintas. Cuando damos una palmada al aire moviendo las manos en dirección horizontal (por ejemplo), estamos comprimiendo un trocito de aire. Al mover las manos juntamos las moléculas de aire lo que da lugar a un aumento de presión del aire, es decir una *compresión*. El aire responde con fuerzas que tienden a "separar" las moleculas excesivamente juntas entre las manos. Al separarse las moleculas generan una nueva compresión a derecha e izquierda y la onda de sonido comienza a propagarse . En este caso, tanto las moléculas como la onda se mueven en la misma dirección: se trata de una **onda longitudinal**. La onda de sonido se ilustra en la figura 1.

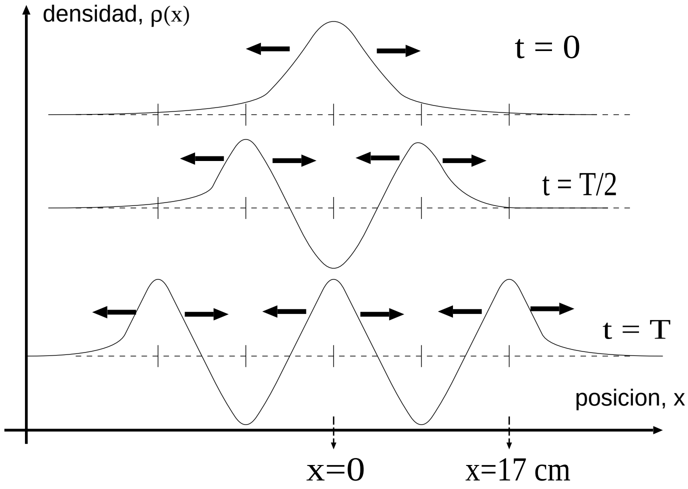

Figura 1: **Onda longitudinal.** Esquema de la propagación de una onda de sonido formada por un repentino aumento de presión inicial ($t = 0$) en x=0. Las curvas indican la densidad en función de la posición x y las flechas indican el movimiento de las moléculas del gas por donde se propaga la onda. Los tiempos se indican con respecto al periodo de la onda, T.

1.2. Función de onda

Imaginemos un surfista sobre una ola que viaja frente a la orilla. Durante un tiempo (antes de que la ola se disperse y desaparezca) el surfista ve siempre la misma ola, quieta, bajo sus pies. Sin embargo desde la playa vemos como el surfista se mueve, sobre la ola. Este símil indica que el pulso de una onda se propaga inmutable en el espacio a una cierta velocidad. En realidad, las ondas terminan por dispersarse, reflectarse o refractarse, pero por ahora consideramos una onda ideal que no se deforma.

Imaginemos que la altura de la ola viene dada por función *espacio-temporal* $y(x,t)$ que describe a la onda. Nos dice cual es la altura de la ola (y) para cada posición horizontal x y cada tiempo t. En la figura (2) se ilustra a este surfista viajando fijo en la cresta de una onda (ola) hacia la derecha a una velocidad c. Esta velocidad, propia de la onda, se denomina **velocidad de propagación de la onda**, o también **velocidad de fase**. En la figura 2 se muestra una onda que se mueve hacia la derecha con velocidad de fase c, como se explica en el pie de página su función de onda cuple que

$$y(x,t) = y(x - ct, 0).$$

Parece que si esto es asi, nos sobra una variable pues, en realidad, todo depende del grupo $x - ct$, que determina la coordenada "propia" de la onda. Definimos por tanto la función de la onda viajera hacia la derecha como,

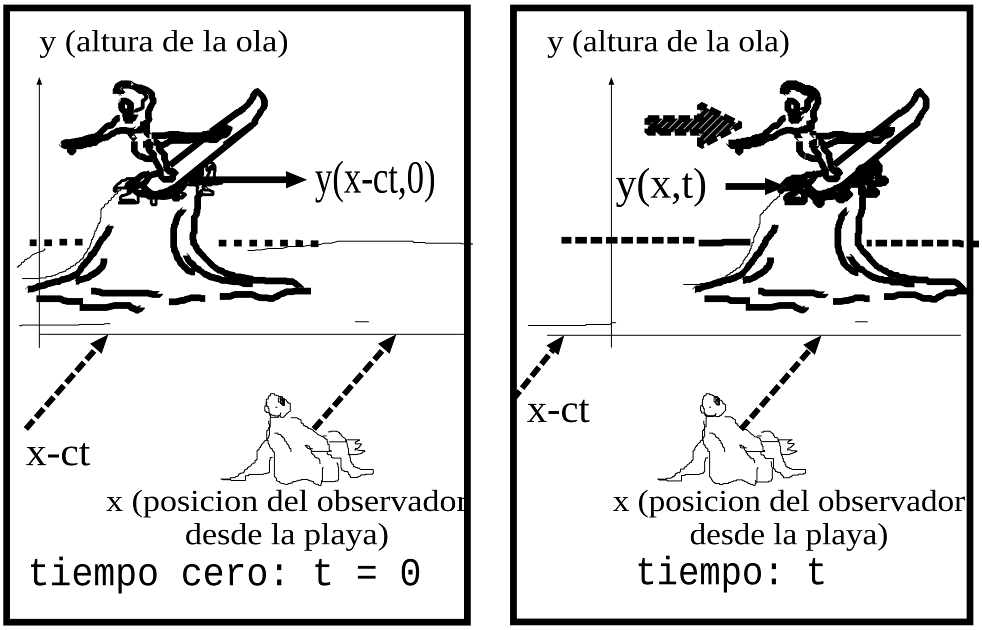

Figura 2: En el instante inicial $t = 0$, un surfista que viaja sobre una ola a velocidad c, está a una cierta distancia del observador de la playa situado en la posición x. El surfista va sobre una ola que no se deforma, a una altura y sobre el horizonte. Pasado un tiempo t, el surfista pasa por la posición del observador en x: ha recorrido una distancia ct, asi pues su posición a tiempo cero era $x - ct$. Como la ola no se ha deformado, su altura y tampoco y por tanto $y(x - ct, 0) = y(x, t)$.

$$y_{\rightarrow}(x, t) = f(x - ct) \text{ onda hacia } \rightarrow$$

Fijaos que si la onda viajase hacia la izquierda, su función dependería de $x + ct$.

$$y_{\leftarrow}(x, t) = f(x + ct) \text{ onda hacia } \leftarrow$$

Veamos otra forma de ver que el grupo $s = x + ct$ es el que controla la función de onda $f(s)$. Supongamos que en el tiempo inicial $t_0 = 0$ la onda tiene un máximo en $x_{\text{máx}} = x_0$. Entonces $s_{\text{máx}} = x_0 + ct_0 = x_0$. Si la onda viaja a la derecha, la posición del máximo a tiempo t será $x_{\text{máx}} = x_0 + ct$. Por tanto $x_{\text{máx}} - ct = x_0 = s_{\text{máx}}$ es siempre constante. El mismo argumento vale para cualquier posición de la onda, y por ello la altura de la onda es constante en $s = x - ct$ (onda viajera hacia la izquierda) o bien en $s = x - ct$ (si la onda va hacia la derecha).

1.3. Ecuación de ondas

Ya sabemos como depende una onda del espacio y el tiempo; sea cual sea su forma, será una función del grupo $s = x \pm ct$. Es decir $f(s) = f(x \pm ct)$
Vamos a buscar una ecuación que describa la dinámica de una onda. Para ello busquemos primero la acerelación de la onda, es decir su segunda derivada en el tiempo. Usaremos la célebre *regla de la cadena* de las derivadas de una función dentro de otra función. La primera derivada con el tiempo es,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = (\pm c)\frac{df(s)}{ds}$$

y, del mismo modo, la segunda derivada es,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 f(s)}{ds^2}\frac{ds}{dt} = c^2\frac{d^2 f(s)}{ds^2}$$

Derivemos ahora igualmente en el espacio x. Dado que dado que $ds/dx = 1$, se obtiene,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f(s)}{ds^2} = \frac{d^2 f(s)}{ds^2}$$

Por tanto hemos obtenido

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Esta es la famosa ecuación de las ondas *lineales*, válida para cualquier tipo de onda (increible), siempre que la amplitud de la onda (es decir el valor máximo de y) no sea demasiado alto.

1.4. Longitud de onda y frecuencia de una onda.

Para ilustrar el concepto de longitud de onda y frecuencia vamos a introducir un tipo de onda ideal: **la onda sinusoidal**.

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}\left[[(x - ct)\,\frac{2\pi}{\lambda}\right] \tag{1}$$

En la ecuación (1), el parámetro λ se denomina **longitud de onda**. Vamos a ver que λ determina la distancia entre crestas (máximos) consecutivas de la onda, o entre los valles consecutivos (mínimos).
En efecto, dado que para cualquier n entero, en $s = \pi/2 + 2\pi n$ hay un máximo de la función seno, entonces cada una de las crestas de la onda sinusoidal estará en,

$$(x_n - ct)\,\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \ \text{ con } \ n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

es decir los máximos de la onda están situados en,

$$x_n = \frac{\lambda}{4} + \lambda n + ct \tag{2}$$

Fijaos que cada máximo de la onda se encuentra a una distancia $\lambda/4$ de un cero y "viaja" (en este ejemplo a la derecha) con velocidad c. En el tren de onda, la distancia entre máximos consecutivos es siempre la misma:

$$x_{n+1} - x_n = \lambda$$

Es decir, la longitud de onda.

¿ Cuánto tarda una cresta de la onda en recorrer su longitud de onda λ ? Para saberlo basta mirar la ecuación (2). La respuesta es sencilla. Escojamos por ejemplo el máximo para $n = 0$; a tiempo $t = 0$ este máximo estará en $x_0 = \lambda/4$. Queremos saber cuál es el tiempo $t = T$ para el cual $x_0 = \lambda/4 + \lambda$. Usando la ecuación (2) se obiene que,

$$T = \frac{\lambda}{c} \tag{3}$$

Éste tiempo es el **periodo** de la onda (en segundos). La frecuencia de la onda (en Herztios) viene dada por $f = 1/T$,

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{4}$$

Usando la relación (3) podemos reordenar la onda sinusoidal descrita en (1) como

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{5}$$

La relación (5) pone mucho más claro la naturaleza de la onda: con una periodicidad doble, en el tiempo y el espacio. Para cada punto fijo x, la onda describe un movimiento armónico simple con periódico T. Mientras que si congelamos la onda en un instante de tiempo t, lo que vemos es que la onda tiene una periodicidad espacial, un patrón que se repite cada longitud de onda, λ. Así λ podría llamarse el "periodo espacial" de la onda, mientras que T es su "periodo temporal". Por otra parte, recordemos que la frecuencia angular (radianes/segundo) es $\omega = 2\pi/T$. Del mismo modo podemos introducir una "frecuencia espacial", que se suele denominar **número de onda**,

$$k = 2\pi/\lambda \tag{6}$$

El valor de k nos informa del "número de ondas" que hay por unidad de longitud. Asi, k bajo corresponde a ondas largas y k alto a ondas cortas.

Una expresión general de una onda sinusoidal es,

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{7}$$

Donde ϕ es el desfase de la onda, que establece $y(0,0)$; en tiempo $t = 0$ y posición $x = 0$.

2. La velocidad de la onda: dependencia con el medio.

Como dijimos al principio, la velociad de propagación de las ondas c depende **únicamente** del medio. Vamos a intentar entender como depende la velocidad de propagación de la onda con el tipo de medio.
Una onda se genera porque en un medio, inicialmente en equilibrio, añadimos una "perturbación". En respuesta a esta **perturbación inicial** el medio responde con una fuerza de reacción, o respuesta, que depende de como sea el medio de "suceptible". Por ejemplo, la respuesta de un muelle blando será más lenta que la de un muelle duro. En concreto, dado dos medios que perturbamos con la misma perturbación inicial: la velocidad de propagación de la onda en el medio 1, será mayor si su respuesta es mayor que la del medio 2.

2.1. Ondas en cuerdas

Las ondas en cuerdas son **transversales** puesto que cada punto de la cuerda oscila en la dirección perpendicular a la velocidad de propagación de la onda. Ya sabemos que en las cuerdas las fuerzas se propagan como la tensión de la cuerda, $\mathcal{T}$. Por otra parte la perturbación de una cuerda consiste en mover parte de la misma, lo cual requiere mover una cierta masa por unidad de longidud, μ.

2.2. Ondas de sonido

El sonido surge de la transmisión de ondas de presión: compresión y rarefacción (véase la figura 1). Ante una perturbación en la forma de un aumento "local" de presión en un punto del fluido ΔP se genera un aumento de densidad $\Delta\rho$ con respecto a su densidad en equilibrio. Como se ilustra en la figura 1, las fuerzas de presión mueven las moléculas de manera oscilatoria, en la misma dirección que la onda de sonido (es una **onda longitudinal**). El sonido es tan rápido que la onda viaja por el medio sin perder el exceso de calor que genera; viaja por tanto *adiabaticamente*. La velocidad del sonido depende de la relación entre la variación de presión y densidad, a calor (entropía) constante. Esta relación solamente depende la ecuación de estado del fluido (gas o líquido), que determina la relación entre la presión y la densidad $P = P(\rho)$ para cada temperatura.

3. Potencia de una onda

Para ilustrar la potencia que transmite una onda, consideremos el ejemplo de una cuerda. Tenemos una cuerda de $L = 1$ metro, es decir 100 cm y que pesa $m = 50$ gramos. Consideremos el movimiento de un trocito de cuerda de $\delta x = 1$ cm. El peso de este trocito de cuerda es

$$\Delta m = \frac{m}{L}\delta x = \frac{50\text{gr}}{100\text{cm}} \times 1\,\text{gr} = 0{,}5\,\text{gr}.$$

La masa del trocito de cuerda es igual a la densidad "lineal" $\mu = m/L$ multiplicada por la extensión del trocito δx. Es decir

$$dm = \mu dx \tag{8}$$

La posición del trozito de cuerda en el eje y es la función de la onda $y(x,t)$, y su velocidad es $v = (\partial y/\partial t)_x$. Asi pues, la energía cinética de este trocito de cuerda moviéndose debido a la onda es

$$dE_c = \frac{1}{2}\, dm\, v^2 = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

Usando la relación (8) y la solución de la ecuación de ondas (7) se tiene que,

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx + \omega t)\, dx \tag{9}$$

La energía oscila por tanto en el espacio y en el tiempo, con la onda. Vamos a ver cuánta energía hay almacenada en una longitud de onda. Para ello tomamos una "instantanea" de la onda, por ejemplo a $t = 0$. Promediamos la ecuación (9) a lo largo de una longitud de onda (desde $x = 0$ hasta $x = \lambda$) y tras un pequeño cálculo (lo dejo como ejercio) resulta,

$$E_c(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dE_c(x) = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda \tag{10}$$

Donde $E_c(\lambda)$ es la energía cinética contenida en una longitud de onda. Es posible demostrar que la energía potencial contenida en una longitud de onda es la misma que la energía cinética $U(\lambda) = E_c(\lambda)$. La energía total $E(\lambda) = U(\lambda) + E_c(\lambda)$, es por tanto

$$E(\lambda) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \tag{11}$$

Como lo que tarda la onda en propagarse una longitud λ es precisamente el periodo de oscilación de cualquier punto de la cuerda, entonces (11) es precisamente la energía pasa por nuestro trocito de cuerda durante un periodo de oscilación $T = \lambda/c$ (donde c es la velocidad de propagación de la onda). Por tanto, la potencia de la onda es

$$\mathcal{P} = \frac{E(\lambda)}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 c \tag{12}$$

4. Superposición de ondas

En un mismo medio pueden existir muchas ondas, propagándose al mismo tiempo en distintas direcciones. Para comprobarlo basta tirar una piedra en un estanque, y dos, tres, cuatro, etc... y ver lo que ocurre. Si no supiésemos que existen las ondas el resultado del bombardeo de piedras sobre el movimiento del estanque nos parecería complicadísimo. El movimiento de cualquier punto del estanque parecería caótico y sin sentido. Sin embargo, es muy simple: el movimiento de cada punto del estanque surge de la suma de cada onda que generamos. Es decir de la **superposición de ondas**. Esta es la idea que subyace en el **principio de superposición**. En resumen, si en un medio tenemos dos ondas $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ al mismo tiempo el movimiento total vendrá descrito por

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

En general, si tenemos n ondas la resultante sera la suma de todas ellas

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x,t) \tag{13}$$

Visto así parece un resultado "de cajón", sin embargo, el humano tardó bastante tiempo en darse cuenta de este resultado tan elegante, pues los efectos de superposición de ondas generan extraños fenómenos, nada intuitivos a primera vista: algo mágicos.
Veamos algunos de ellos.

4.1. Interferencia

La interferencia se produce entre dos ondas que tienen la misma frecuencia, pero un cierto desfase δ; es decir

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)\ ;\ \ y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t + \delta)$$

El resultado de la suma de ambas es curioso. Usando una de las *propiedades de las funciones trigonométricas* (busca esto en `http://google.com`)

$$\mathrm{sen}\,a + \mathrm{sen}\,b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{14}$$

se llega a (hacer como ejercio),

$$y = y_1 + y_2 = \left(2A\cos\frac{\delta}{2}\right)\mathrm{sen}\left(kx + \omega t + \frac{\delta}{2}\right) \tag{15}$$

Curioso, porque fijaos que la onda resultante es otra onda similar, pero su amplitud total es

$$A_{tot} = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Por tanto si

- $\cos(\delta/2) = \pm 1$, es decir $\delta = \{0, 2\pi, 4\pi, ...\}$ entonces $A_{tot} = 2A$. Las dos ondas tienen una **interferencia constructiva**
- $\cos(\delta/2) = \pm 0$, es decir $\delta = \{\pi, 3\pi, ...\}$ entonces $A_{tot} = 0$, la onda desaparece!. Esto es una **interferencia destructiva**.

Este es el origen de los famosos patrones de interferencia de cualquier onda, entre ellas las de la luz.

4.2. Ondas estacionarias

Si antes vimos el efecto de la fase, veamos ahora el de la dirección de propagación. Como estamos trabajando en una sola dimensión, esto se reduce al *sentido* de propagación de dos ondas. Ahora tenemos dos ondas viajeras que viajan en la misma dirección y sentidos opuestos.

$$y_1 = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)$$
$$y_2 = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t)$$

Usando que

$$\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}\,a \cos b \pm \cos a\,\mathrm{sen}\,b$$

Nos queda que,

$$y(x,t) = (2A\,\mathrm{sen}\,kx)\cos(\omega t) \tag{16}$$

No parece gran cosa, pero veamos la posición del máximo de la onda, es decir su cresta, $x_{\text{máx}}$. Si elegimos $kx_{\text{máx}} = \pi/2, 3\pi/2, ...$ resulta la onda y se hace máxima. Pero esto pasa *para cualquier valor del tiempo!*. Por tanto la onda "aparentemente" no se mueve. Sus crestas siempre están en el mismo sitio, y sus valles (mínimos) y sus nodos (donde $y = 0$). Por eso este tipo de onda se denomina *estacionaria*.

4.3. Ondas confinadas, condiciones de contorno, armónicos.

Podemos generar ondas estacionarias (y de hecho las generamos) en cualquier instrumento musical acústico. ¿Cuál es la razón? Veamos una guitarra. Se trata de varias cuerdas de longitud L atadas por sus dos extremos. Físicamente esto quiere decir que la cuerda *no se mueve nunca* en los extremos $x = 0$ y $x = L$. Matemáticamente,

$$y(0,t) = 0 \;\text{ y }\; y(L,t) = 0 \tag{17}$$

Esto implica que una onda que perturbemos va a *reflejarse* en los extremos fijos y va a sumarse a su imagen reflejada, que viaja en sentido opuesto. Ya tenemos las dos ondas viajeras iguales viajando en sentidos opuestos que dan una onda estacionaria.
Si sustituimos las denominadas **condiciones de contorno** (17) en (16) obtenemos que únicamente algunas longitudes de onda $\lambda = 2\pi/k$ son aceptadas por la cuerda.
Si la velocidad de propagación de la onda es $c = \sqrt{T/\mu}$, entonces las frecuencias posibles de las ondas en la cuerda de guitarra pueden ser

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \;\text{ siendo }\; n = 1, 2, ... \tag{18}$$

Estos son las frecuencias de los denominados **armónicos**. La existencia de armónicos es general en instrumentos musicales, pero también en otros campos, como los fluidos, la mecánica cuantica, etc... En general en todo fenómeno físico compuesto por ondas dentro de "cavidades" que imponen *condiciones de contorno*.

4.4. Ondas de frecuencia cercana: batidos

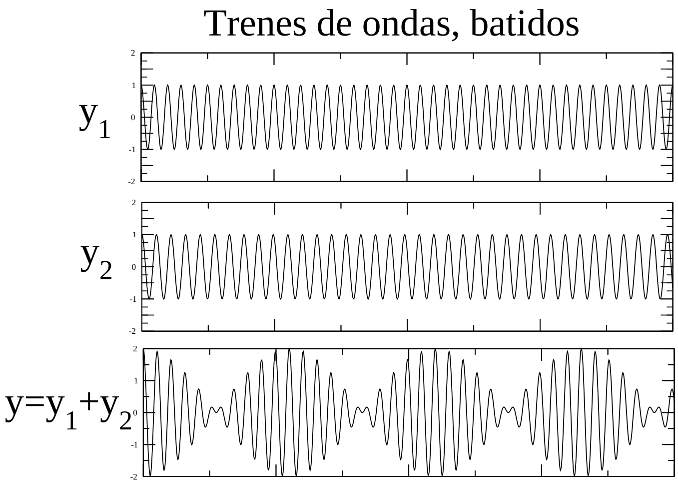

Figura 3: Dos ondas de frecuencias muy similares se superponen, el resultado (figura de abajo) es un tren de ondas con una modulación de baja frecuencia que se conoce como *batidos*

Otra parte muy importante de los fenómenos de ondas ocurre cuando se superponen dos ondas de frecuencias distintas, pero muy cercanas entre sí. Por ejemplo, las ondas

$$y_1 = A\cos(kx - \omega_1 t) \quad \text{y} \quad y_2 = A\cos(kx - \omega_2 t)$$

donde las frecuencias son $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ y $\Delta\omega$ es mucho más pequeño que la media $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$. El resultado de la superposición de y_1 e y_2 es,

$$y = 2A\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right]$$

O bien,

$$y = 2A\cos\left(\Delta\omega t\right)\cos\left(\bar{\omega}t\right)$$

Es decir, el resultado es una onda de frecuencia "rápida" ($\bar{\omega} \simeq \omega_1$) *multiplicada* por otra onda de frecuencia muy pequeña $\Delta\omega$. Esto se llama modulación de ondas y el resultado puede verse en la figura 3

4.1 Cual es la frecuencia en Hz de la onda de la figura 1, sabiendo que se está propagando en aire a temperatura ambiente.

4.2 A partir de argumentos dimensionales y sabiendo que la velocidad de la onda en una cuerda depende de su tensión $\mathcal{T}$ y su masa por unidad de longitud μ, estimar la velocidad de propagación de las ondas en cuerdas.

4.3 Usando argumentos dimensionales establer como depende la velocidad del sonido con el salto de presión ΔP y densidad $\Delta\rho$ que genera la onda en el medio.

4.4 Dos ondas sonoras iguales de frecuencia 440 Hz, salen de dos altavoces situados en $x = 0$ y $x = d$, propagándose en dirección "x". La distancia entre los altavoces es d y el oyente está situado en el mismo eje, mucho más allá, en $x = 10\,d$. ¿ Cúal debe ser esta distancia d para que un oyente no oiga nada de nada? Curiosamente, la interferencia de ondas sonoras se usa para eliminar "ruidos" de máquinas en algunos sitios de trabajo.

4.5 Demostrar que las únicas ondas posibles en una cuerda con dos extremos fijos, tienen alguna de estas longitudes de onda,

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{siendo } n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

4.6 Dibuja las ondas asociadas a los armónicos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. La frecuencia que se obtiene para $n = 1$ se denomina frecuencia "fundamental" de la cuerda, mientras que $n > 1$ se denominan armónicos.

4.7 En los clarinetes, las flautas, los órganos de iglesia, también existen ondas confinadas que suenan musicalmente. Los armónicos sin embargo son distintos a los de la guitarra o el piano (cuerdas atadas por dos extremos). Esto es así porque las ondas de sonido en tubos abiertos por un extremo cumplen las siguientes condiciones de contorno

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0 \text{ extremo abierto}, \quad y(L,t) = 0 \text{ extremo cerrado}$$

Usando $y = A\cos(kx)\cos(\omega t)$ encontrar la fórmula para las n frecuencias de los armónicos de un tubo de longitud L. La velocidad del sonido en el aire es $c \simeq 340\text{km/h}$. ¿ Cual es la frecuencia fundamental para un tubo de longitud $L = 1\text{m}$? ¿Qué longitud tiene el tubo del órgano que como nota fundamental da la nota "La", siendo $f_{La} = 440\text{Hz}$?

4.8 Calcula la superposición de dos ondas con frecuencia y número de onda muy cercanos (en concreto, con frecuencias ω_1 y $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ y números de onda k_1 y $k_2 = k_1 + \Delta k$). Pon la resultante en función de los valores medios $\bar{\omega}$ y $\bar{k}$ y las desviaciones $\Delta\omega$ y Δk.

4.9 Razona el anterior resultado. ¿Cuántas ondas aparecen en la solución? ¿Cuáles son sus velocidades de onda? ¿A qué velocidad se propagará el grupo de ondas, similar al de la gráfica de abajo de la figura 3 ?