Física II. OSCILACIONES

1. Noción de oscilación.

- **Una posición de equilibrio** es cualquier posición del sistema donde las suma de las fuerzas que actuan sobre el sistema es ZERO.
- Si perturbamos un sistema y lo desplazamos de una **posición de equilibrio estable** el sistema vuelve a su posición de equilibrio.

2. Movimiento armónico simple (MAS)

Un movimiento armónico es un movimiento oscilatorio caracterizado por una única frecuencia de oscilación. Un ejemplo característico de movimiento armónico simple es el movimento de un muelle.
La dinámica de un muelle viene dada por la **fuerza recuperadora**. Esta es una fuerza en dirección opuesta al desplazamiento del cuerpo respecto a su posición de equilibrio.
Por ejemplo, consideremos un muelle para el cual su posición de equilibrio está en x_{eq}. Evidentemente, $(x - x_{eq})$ es el **desplazamiento respecto de la posición de equilibrio**. La fuerza recuperadora es por tanto,

$$F_x = -k\,(x - x_{eq}) \tag{1}$$

Esta es la famosa **Ley de Hooke**, siendo k la **constante del muelle**
A menudo eligiremos un sistema de referencia para el cual la posición de equilibrio sea $x_{eq} = 0$, de modo que

$$F_x = -k\,x \tag{2}$$

Por otra parte, sabemos que la aceleración a y la fuerza están relacionadas por la **Primera Ley de Newton**,

$$F_x = m\,a,$$

donde m es la masa del objeto atado al muelle. La aceleración a es igual a la segunda derivada de la posición respecto al tiempo,

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$$

Asi pues, la ecuación del movimiento de un muelle es

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \tag{3}$$

La solución general de la Eq. (3) es (compruébalo sustituyendo)

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{4}$$

Distingamos algunas propiedades de la solucion Eq. (4)

- **Frecuencia angular** ω. En un movimiento armónico simple el sistema vuelve a la misma posición cada intervalo fijo de tiempo, es decir

$$x(t) = x(t+T)$$

siendo T el **periodo de oscilación** (medido en segundos). La frecuencia es el ritmo de repetición, es decir, el inverso del periodo $f = 1/T$ (medida en Herzios, 1 Herzt $= 1$/seg; una vez por segundo).

Usando la propiedad de la función trigonométrica, $\cos(z) = cos(z + 2\pi)$ y a partir de la Eq. (4) se obtiene que

$$x(t+T) = \cos(\omega(t+T) + \delta) = \cos(\omega t + \delta + 2\pi)$$

Por tanto $\omega T = 2\pi$, o lo que es lo mismo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Es decir ω es proporcional a la frecuencia en Herzios; se denomina **frecuencia angular**, y está medida en **radianes/segundo**. (volveremos sobre esto, mas adelante)

- **Amplitud, A**. Como toda función trigonométrica, el coseno está comprendido entre -1 y 1, asi pues, la amplitud máxima del desplazamiento es A.

- **Fase**. La fase es el argumento de la función trigonométrica, por ejemplo en la Eq.(4) la fase es $\omega t + \delta$

- **Constante de fase,** δ . Esta constante simplemente determina cuánto vale el desplazamiento a tiempo zero. En efecto, para $t = 0$, se tiene

$$x(0) = A\cos(\delta)$$

- Dado que $\cos(z) = \sin(z + \pi/2)$, la solución (4) puede tambien expresarse en función del seno, $\sin(\omega t + \delta + \pi/2)$. Es decir, lo importante es que se trata de una función trigonomética (seno o coseno)

2.1. Sistemas en fase o en desfase

Sean dos MAS con la misma frecuencia, pero distinta fase: $x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \delta_1)$ y $x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \delta_2)$. Diremos que están **en fase** si $\delta_1 = \delta_2 + 2\pi$ (en general si $\delta_1 = \delta_2 + 2\pi n$ siendo n un número entero) y **en desfase** si esto no ocurre. En particular, estarán **en oposición de fase** si $\delta_1 = \delta_2 + \pi$ y **en desfase de 90^o** si $\delta_1 = \delta_2 + \pi/2$.

3. Energía del movimiento armónico simple

La energía total E de un sistema puede descomponerse en dos partes: energía cinética E_c (asociada al movimiento) y la energía potencial U (asociada a la posibilidad de movimiento). Es decir,

$$E = E_c + U$$

La energía cinética es proporcional al cuadrado de la velocidad $v = \dot{x}$,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Mientras que la energía potencial se define en función del campo de fuerza que actua sobre el cuerpo. En concreto, la fuerza sobre el cuerpo es proporcional a la derivada de U respecto al desplazamiento, en cada punto

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \tag{5}$$

En la figura 1 se ha representado esquemáticamente un *perfil* de energía potencial $U(x)$ frente a la posición x. Para entender intuitivamente la relación (5) podemos usar la analogía de una pelota cayendo en un pozo (véase la figura). En este caso, la energía potencial $U(x)$ sería proporcional a la altura de la pelota ($U = mgh$). La fuerza que sufre la pelota en cada punto es igual a la pendiente en ese punto, pero con signo opuesto: $F = -\frac{dU}{dx}$. En el fondo del pozo $x = x_0$, la pendiente es cero $\frac{dU(x_0)}{dx} = 0$ y por tanto fuerza es nula. Cerca del fondo del pozo $x \simeq x_0$ la energía potencia puede aproximarse con una parábola,

$$U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2U(x_0)}{dx^2}(x - x_0)^2$$

y usando (5) la fuerza cerca del fondo del pozo resulta ser, $F(x) = -k(x - x_0)$, siendo k

$$k = \frac{d^2U(x_0)}{dx^2}.$$

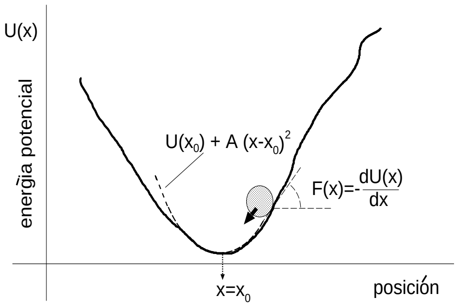

Figura 1: Representación gráfica de la energía potencial $U(x)$. Para ilustrar la relación entre fuerza F y energía potencial $U(x)$, véase la ecuación (5).

Si lo que conocemos es la fuerza $F(x)$ y queremos calcular el potencial $U(x)$, tenemos que integrar la fuerza $F(x)$ a partir de la ecuación (5). Pero, al integrar solo podemos obtener **diferencias de energía potencial** entre dos puntos x_1 y x_2. A partir de (5),

$$U(x_2) - U(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \tag{6}$$

Usando la expresión para la fuerza recuperadora Eq. (1) en (6) se obtiene,

$$U(x) - U(x_{eq}) = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 \tag{7}$$

Esto siempre ocurre en física: solamente podemos conocer realmente las diferencias de energía potencial entre dos puntos. Normalmente se usa el convenio de elegir $x_1 = x$ (libre) y $x_2 = x_{eq}$, la posicion de equilibrio. Además, siempre que sea posible y por comodidad se suele elegir $x_{eq} = 0$ y $U(x_{eq}) = 0$. De este modo,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{8}$$

CUESTIONES. -1-

1.1 ¿Qué unidades tiene la constante de recuperación de un muelle k ? Expresa las unidades de k en función de la unidad de longitud ℓ, masa m y tiempo t (por ejemplo, para una velocidad la respuesta sería ℓ/t).

1.2 A partir de la solución del MAS (ecuación (4), calcular el desfase entre x y su velocidad $\dot{x}$ y entre x y su aceleración $\ddot{x}$

1.3 Una vez calculada la aceleración del MAS en la Eq. (4), compara lo que obtienes con la ecuación dinámica Eq. (3). A partir de ahí, relaciona la frecuencia angular ω con la constante de recuperación k y la masa del cuerpo m.

1.4 Calcula la frecuencia de oscilación del MAS, usando argumentos dimensionales (pista: sabes que la frecuencia ω debe de depender de una única combinación de k y m que tenga unidades de inverso de tiempo.)

1.5 Sabes que un muelle se desplaza inicialmente una distancia x_0 de su posición de equilibrio y que además le empujas con una velocidad inicial v_0. Calcula su amplitud A y su fase δ de movimiento.

1.6 ¿Crees que la frecuencia de un muelle depende de su amplitud de movimiento?

1.7 Comprobar que

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

es también solución de la ecuación (3), siempre que $\omega = \sqrt{k/m}$.

1.8 Expresar a y b en la relación anterior, en función de la fase δ y la amplitud A de la solución expresada como $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$.

1.9 (a) Comprobar que $\exp(i\omega t)$, donde i es el número complejo $i = \sqrt{-1}$ ($i^2 = -1$), es también solución de la ecuación (3) del MAS. (b) Calculad la velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$ a partir de $x(t) = \exp(i\omega t)$. Sabiendo que $\exp i\pi/2 = i$ (desfase de 90^o) y que $\exp i\pi = -1$ (desfase de 180^o), poned la velocidad y la aceleración como $\exp[i(\omega t + \delta)]$ para dejar claro los desfases entre x, $\ddot{x}$ y $\ddot{x}$.

1.10 Tenemos una pelota de masa m cerca del fondo de un pozo, que está situado en en $x = x_0$. Si la energía potencial cerca del fondo se aproxima como una parábola, $U(x) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_0}(x - x_0)^2$, ¿ a qué frecuencia oscilará la pelota en torno a la posición x_0?.

1.11 A partir de la solución del MAS (4) y de su velocidad comprobar que $E_c + U$ es constante para todo tiempo. En efecto, esa constante que se obtiene es la energía total del sistema, $E = E_c + U$, por tanto acabas de demostrar que,

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \tag{9}$$

4. Otros sistemas con movimento armónico simple

4.1. Muelle colgado en vertical: el efecto de la gravedad

Sobre una masa colgada verticalmente por un muelle actúan dos fuerzas: la del muelle y la de la gravedad. Esto es,

$$F = -ky + mg$$

En la posición de equilibrio del muelle colgado verticalmente y_0, la fuerza del muelle se compensa con la de la gravedad,

$$ky_0 = mg.$$

La fuerza total puede reescribirse entonces como

$$F = -k(y - y_0) + mg - ky_0 = -k(y - y_0)$$

Y la ecuación del muelle queda, $m\ddot{y} = -k(y - y_0)$. Pero y_0 es constante, por tanto si definimos la variable $\hat{y} = y - y_0$, su aceleración es la misma que y, esto es $\ddot{\hat{y}} = \ddot{y}$. La ecuación de movimiento es entonces,

$$\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\hat{y}$$

4.2. El péndulo simple

Un objeto puntual de masa m suspendido de una cuerda (o una barra) de longitud L y de masa despreciable, fija por su extremo superior. Véase la figura Fig. (2).
Las fuerzas que actuan sobre la masa del péndulo son la fuerza de la gravedad $\vec{F}_g = m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda $\vec{T}$.
La componente del peso en la dirección **tangente** a la cuerda $F_t = mg\sin\theta$ no está equilibrada y por tanto el cuerpo se mueve en esta dirección. El cuerpo se mueve a lo largo de la coordenada del arco de la cuerda, s, que está relacionada con el ángulo θ por,

$$s = L\theta \tag{10}$$

Fijaos que la coordenada s es positiva si $\theta > 0$, es decir cuando el cuerpo está a la derecha de la vertical (como en la figura). Por tanto, la componente tangencial del peso F_t va siembre en sentido contrario de la coordenada s (ver figura). Esa es la razón de que el cuerpo oscile, porque existe una fuerza recuperadora. Usando la Primera Ley de Newton,

$$F_t = -mg\sin\theta \tag{11}$$

$$m\ddot{s} = m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{12}$$

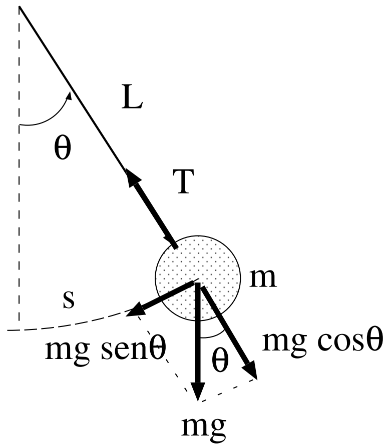

Figura 2: Un péndulo simple.

Derivemos ahora la relación (10) frente al tiempo. Dado que L es constante, $\dot{s} = L\dot{\theta}$ y $\ddot{s} = L\ddot{\theta}$. Por tanto la ecuación (12) resulta,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{13}$$

Esta es la ecuación que controla la evolución del ángulo θ del péndulo con el tiempo, $\theta(t)$. En principio, no sabemos resolverla pues la aceleración depende de una función complicada del ángulo (el seno). Es decir, en general el movimiento del péndulo no será un movimiento armónico simple (MAS). Sin embargo, podemos sacar alguna información extra si suponemos que la amplitud del péndulo es pequeña, es decir si el ángulo de amplitud máxima $\theta_{\text{máx}}$ es pequeño (véase la cuestión 2.1)

4.3. El péndulo físico

En este caso tenemos un objecto compacto que cuelga por algún punto fijo, fuera de su centro de masas (CM). Véase la figura (3). En este caso (recordad las lecciones sobre sólido rígido) la gravedad genera un torque que será proporcional a la distancia entre el punto fijo y el centro de masas, d en la figura. El valor del torque viene dador por

$$\vec{\tau} = -m\vec{g} \times \vec{d} \tag{14}$$

Siendo $\vec{d}$ el vector que va desde el punto fijo al centro de masas. El signo $\times$ quiere decir **producto vectorial**, su valor es proporcional al seno del ángulo que forman $\vec{d}$ y $\vec{g}$. Es decir, $-m\vec{g}\times\vec{d} = -mg\,d\sin(\theta)$. Otra forma de verlo, más intutiva, es darse cuenta que el torque está siendo realizado en realidad por la componente tangencial de la gravedad (como en el péndulo físico), cuyo valor era $-mg\sin\theta$. Este vector es perpendicular a $\vec{d}$, por lo que el torque resulta ser simplemente el producto del módulo de ambos vectores perpendiculares, $mg\,d\sin\theta$.
Por otra parte recordad que la ecuación de movimento del sólido rígido viene determinada por la relación entre el torque y su aceleración angular $\ddot{\theta}$. En esta relación "angular", el momento de inercia del cuerpo I hace el papel de "masa", la Segunda Ley de Newton para la rotación es,

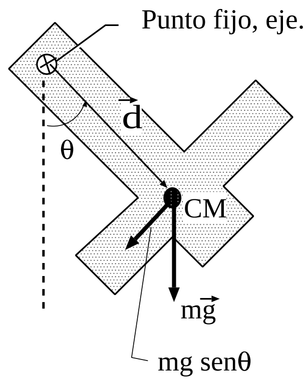

Figura 3: Cualquier objeto colgado por un punto que no sea su centro de masas es un péndulo físico.

$$\tau = I\ddot{\theta} \tag{15}$$

El torque total sobre el sólido es igual al producto del momento de inercia I por la aceleración angular $\ddot{\theta}$. Ya podemos escribir la ecuación de movimiento, arreglando términos de las ecuaciones (14) y (15) se obtiene

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I}\sin\theta \tag{16}$$

De nuevo obtenemos una aceleración proporcional al $\sin\theta$, por lo que el movimiento no se corresponde en general con un movimento armónico simple. Sin embargo para ángulos pequeños podemos hacer las mismas consideraciones que hicimos en el péndulo simple. E incluso las mismas cuestiones (cuestión 2.1).

Algo sobre representación con función compleja

Para algunos cálculos usaremos la función trigonométrica compleja $\exp(i\theta)$. Vamos a introducir algunas propiedades simples de esta función.

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta \tag{17}$$

Esta fórmula es la denominada *representación de Moivre* del número complejo $\exp(i\theta)$. Algunas propiedades son:

- Suma de argumentos de la exponencial: $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
- Desfase de 180^o, oposición de fase: $\exp(i\pi) = -1$
- Desfase de 90^o: $\exp(i\pi/2) = i$

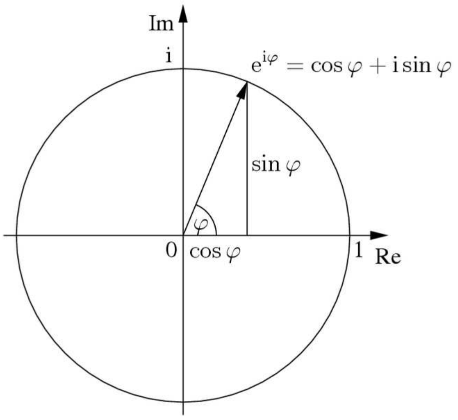

Figura 4: Representación de los números complejos en un plano.

CUESTIONES. -2-

2.1 Obtener la ecuación del ángulo del péndulo físico θ cuando su amplitud máxima es muy pequeña. Pista: para ello, hay que desarrollar la función $\sin\theta$ en torno a $\theta \simeq 0$, usando el desarrollo de Taylor.

2.2 Si has resuelto el anterior habrás visto que para oscilaciones pequeñas, tenemos un MAS. ¿Cual es el periodo del péndulo entonces?

2.3 *Busca la frecuencia del péndulo simple por argumentos dimensionales.* Imagina que no tienes ni idea de ecuaciones diferenciales pero sabes que la frecuencia de oscilación debe depender de m, L y g (claro, en general de todos los parámetros del problema). Bueno, busca la combinación aritmética (multiplicación,división, etc..) entre estas variables que proporciona unidades del inverso de un tiempo. Esa debe ser la relación de la frecuecia del péndulo. Por cierto, te sobra una variable, no? Razona tu respuesta.

2.4 *Busca la frecuencia del péndulo físico por argumentos dimensionales.* Con la experiencia previa intentamos también el análisis dimensional del péndulo físico. Los parámetros del problema son la masa del sólido m, la distancia eje-centro de masas d, la gravedad g y el momento de inercia. Te apuesto lo que quieras a que si lo intentas no te sale. El problema es que vas a encontrar que existen varias combinaciones aritméticas entre estas variables que proporcionan unidades de tiempo. Para encontrar la respuesta correcta tienes que pensar más. Fíjate que existen tres variables que siempre van juntas en este problema, pues determinan el torque. Inténtalo ahora con las dos variables importantes del problema (torque y momento de inercia). El análisis dimensional es muy útil, pero a veces hay que ayudarlo con un poco de noción física del problema.

5. Breve lección sobre solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's).

Como las chuletas me parecen aburridas he decidido mostraros como deducir las relaciones que vienen ahora de manera muy sencilla. Se trata de ser capaz de resolver unas pocas ecuaciones diferenciales ordinarias, bastante simples. El método que os voy a mostrar es muy potente y se usa incluso para resolver problemas muy complicados de física de fluidos, calor, etc ... Por supuesto, no llegaremos a eso. Supongamos que tenemos que una variable x depende de otra t. Esta frase es escribe así, $x = x(t)$. Hasta ahora, x es una posición y t un tiempo. Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una relación entre las derivadas de x respecto a t. Por ejemplo en la ecuación del muelle teniamos la siguente EDO,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{18}$$

Donde la notación $\ddot{x}$ significa, como ya sabemos,

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

En un caso más general (el oscilador amortiguado), tenemos una dependencia extra con la primera derivada temporal, la velocidad $\dot{x}$;

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{19}$$

Para resolver este tipo de ecuaciones vamos a lanzar una apuesta. Apostamos a que la solución va como

$$x(t) \sim \exp(\Omega t) \tag{20}$$

Para ganar queremos que la apuesta sea lo más general posible. Para ello dejamos que el núcleo de la apuesta, el número Ω sea un número complejo. ¿ Porqué ? Sencillo, si Ω es un número complejo entonces $\Omega = \Omega_r + i\Omega_i$, y por tanto la solución propuesta (apuesta) tendrá un dependencia con el tiempo en forma de exponencial pura y otra parte oscilatoria. En efecto,

$$\exp(\Omega) = \exp[(\Omega_r + i\Omega_i)t] = \exp(\Omega_r t)\exp(i\Omega_i t) \tag{21}$$

O lo que es lo mismo, usando la representación de Moivre $\exp(\theta) = cos\theta + i\sin\theta$ [recordad la relación (17)], se tiene que

$$\exp(\Omega) = \exp(\Omega_r t)\left[\cos(\Omega_i t) + i\sin(\Omega_i t)\right]. \tag{22}$$

Dado que $x(t)$ es un número real, nos bastará con coger la parte real de nuestra apuesta como solución final. Fijaos que Ω_r, la parte real de Ω nos da el tipo de dependencia exponencial pura, mientras que la parte imaginaria Ω_i nos da un comportamiento oscilatorio tipo $\cos(\Omega_i t)$. En realidad si $\exp(i\Omega_i)$ es solución, entonces una onda con cierto desfase es tambien solución, por ejemplo $\exp\left[i\left(\Omega_i t + \pi/2\right)\right]$ (recordad la clase # 1). Por tanto, la solución más general que podemos poner es,

$$x(t) = \exp(\Omega_r t)\,[a\cos(\Omega_i t) + b\sin(\Omega_i t)] \tag{23}$$

Donde a y b son dos constantes que solamente podremos saber si conocemos las condiciones iniciales, es decir la posicion y velocidad en el instante cero $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Recordad, que en la cuestión 1.8 demostramos que siempre es posible encontrar una fase δ y una amplitud A que cumplan, $A\cos(\Omega_i t + \delta) = [a\cos(\Omega_i t) + b\sin(\Omega_i t)]$. Por tanto, la solución (23) puede expresarse también como

$$x(t) = A\exp(\Omega_r t)\cos(\Omega_i t + \delta). \tag{24}$$

Bien, volvamos a nuestra apuesta inicial en la ecuación (20) y juguemos la mano. Para ello solo hay que saber derivar una exponencial (complicadísimo):

$$\frac{d\exp(\Omega t)}{dt} = \Omega\exp(\Omega t) \tag{25}$$

$$\frac{d^2\exp(\Omega t)}{dt^2} = \Omega^2\exp(\Omega t). \tag{26}$$

Metamos nuestra apuesta (20) en la ecuación diferencial, por ejemplo vayamos con la primera, ecuación del MAS, sin amortiguar (18). Derivando y sacando factor común, nos queda

$$(\Omega^2 + k/m)\exp(\Omega t) = 0 \tag{27}$$

Esto debe ser cierto para todo tiempo t, por tanto, no queda mas remedio que,

$$\Omega^2 = -k/m$$

Es decir,

$$\Omega = \sqrt{-k/m} = i\sqrt{k/m} \tag{28}$$

Puesto que el número complejo puro i es precisamente $i = \sqrt{-1}$ (o lo habias olvidado?). La solución propuesta paracе que cuadra:

- La parte real de Ω en la relación (28) es nula, es decir $\Omega_r = 0$. Por tanto, según nuestra apuesta (22) no hay dependencias exponenciales de $x(t)$ con el tiempo
- Según la solución (28) Ω solo tiene parte imaginaria, es decir $\Omega = i\Omega_i = i\sqrt{k/m}$. Por tanto, si miramos ahora nuestra apuesta (22) nos damos cuenta que la solución final de $x(t)$ es puramente **oscilatoria**. La frecuencia angular de $x(t)$ (a la que llamaré ω_0) es

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{29}$$

Introduciendo estos datos en la forma de la solución general (24), se obtiene,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta), \quad \text{siendo } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Tal y como anunciamos, sin justificación en la clase # 1.
Ahora vamos con las oscilaciones amortiguadas

6. Oscilaciones amortiguadas

Como habreis adivinado, ningún sistema real es capaz de oscilar y oscilar hasta el fin de los tiempos. Es decir, no existe ningún sistema que cumpla realmente la ecuación del movimiento armónico simple (18). Desafortunadamente (o afortunadamente) todos estamos sometidos a fuerzas de fricción. Digo esto porque este tipo de fuerza surge del contacto entre dos (o más) cuerpos o elementos que componen cualquier sistema mecánico. Lo peculiar de la fricción es que solamente aparece cuando los elementos en contacto se mueven con distintas velocidades. Por ejemplo, un nadador en una piscina en reposo siente una fuerza de fricción del agua a su alrededor cuando se mueve. La fuerza de fricción que hace el agua en reposo es proporcional a la velocidad del nadador y va siempre en sentido contrario a su movimiento (a su vector velocidad, para ser mas precisos). En nuestros ejemplos unidimensionales, esto se representa asi,

$$F_{\text{friccion}} = -\gamma \dot{x} \tag{30}$$

Donde la constante γ es el coeficiente de fricción, que depende tanto del medio (el agua) como de la forma del cuerpo (el nadador). Vamos a dotar de "realidad" a nuestro muelle añadiendole una fuerza de fricción.

$$F_{\text{total}} = F_{\text{muelle}} + F_{\text{friccion}} = -\gamma \dot{x} - kx$$

Dado que $F_{total} = m\ddot{x}$, lo que resulta de todo esto es la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{31}$$

Fijaos que he dividido por la masa m del cuerpo para que el término de aceleración $\ddot{x}$ quede libre de pre-coeficientes. Sabemos por experiencia propia que si el nadador deja de nadar, termina parándose. Es decir, pasado un tiempo "suficiente" la fricción termina llevando al sistema al reposo: velocidad y aceleración nulas.

Usemos ahora la misma apuesta de la sección anterior, en la ecuación (20), para intentar sacar la solución de la ecuación (31). Usando el mismo procedimento, obtenemos

$$\left(\Omega^2 + \frac{\gamma}{m}\Omega + \frac{k}{m}\right)\exp(\Omega t) = 0 \tag{32}$$

Para obtener Ω basta con resovler la ecuación cuadrática $\Omega^2 + (\gamma/m)\Omega + k/m = 0$. Su solución es

$$\Omega = \frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{33}$$

O lo que es lo mismo, invirtiendo el signo de dentro de la raíz y multiplicando por $i = \sqrt{-1}$,

$$\Omega = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \tag{34}$$

Interesante, ahora sí que tenemos una parte real en la solución para nuestra apuesta Ω. Esta parte real $\Omega_r = -\gamma/(2m)$ proporciona el efecto más llamativo de la fricción: detener al sistema (es decir hacer que su velocidad termine por ser nula, $\dot{x} = 0$). Por otra parte, Ω_i, la parte imaginaria de Ω, que nos proporciona la frecuencia de oscilación ha cambiado por efecto de la fricción: de hecho se ha reducido con respecto a la del muelle simple $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Ahora es,

$$\Omega_i = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}. \tag{35}$$

En conclusión, tenemos que la solución de nuestra propuesta (22) para un oscilador amortiguado tiene dos contribuciones:

- Una caída exponencial, donde la constante de **decaimiento** es

$$\Omega_r = -\frac{\gamma}{2m}$$

- Una parte oscilatoria, con una **frecuencia de oscilación** ω que viene dada por (35), es decir,

$$\omega = \Omega_i = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}.$$

Para obtener la solución general basta sustituir Ω_i y Ω_r en la ecuación (24) (o (23), es lo mismo). Fijaos que no sabemos cuánto vale la amplitud A y la fase δ del movimiento. Para conocerlas es necesario que nos digan como **perturbamos** al muelle inicialmente. Por ejemplo, supongamos que a tiempo inicial $t = 0$, cogemos el muelle y lo estiramos hasta $x(0) = A$, pero le dejamos a velocidad nula $\dot{x}(0) = 0$: sustitutyendo en la solución general (23), nos queda que $a = A$ y que $b = 0$, asi pues

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{\gamma}{2m} t\right) \cos(\omega t), \tag{36}$$

Puedes comprobar que sale lo mismo si usas la solución (24). La frecuencia angular ω viene dada ahora por la ecuación (35). Como veis el término exponencial hace que la solución decrezca con el tiempo hasta pararse (bueno vale, hasta que $x(t)$ y $\dot{x}$ se hacen infinitamente pequeños).
Hasta ahora no hemos jugado con el medio que hace la fricción. Pero claramente, no es lo mismo estirar un muelle en aire que estirar un muelle metido dentro de agua. El agua tiene mucha más fricción que el aire, de modo que el comportamiento del muelle puede llegar a cambiar radicalmente. Veamos esto analizando la frecuencia del muelle amortiguado, dada por la ecuación (35).

6.1. Oscilaciones sub-amortiguadas

Supongamos que la fricción es muy pequeña, es decir

$$\frac{\gamma}{2m} << \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Si nos fijamos en la ecuación (35) el muelle oscila con una frecuencia casi igual a la de muelle ideal, es decir $\omega \simeq \sqrt{k/m}$. Sin embargo, como puede verse en la figura 5 la **envolvente** de la señal oscilatoria decae suavemente, como $\exp[-\gamma/(2m)t]$.

6.2. Oscilaciones críticamente amortiguadas

Si aumentamos la fricción el tiempo que tarda en pararse el muelle disminuye y disminuye. A partir de una fricción critica, el tiempo que tarda la fricción en parar al muelle es similar al periodo del muelle. Por

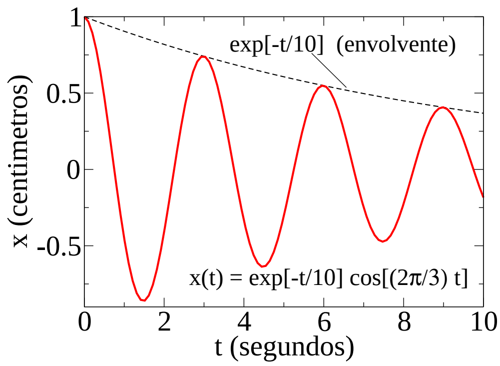

Figura 5: Un ejemplo de la posición $x(t)$ de un muelle subamortiguado de masa $m = 1kg$ frente al tiempo t.

tanto, el muelle no es capaz de oscilar. Esto ocurre cuando $\gamma/(2m) = \sqrt{k/m}$. Fijaos que la frecuencia se hace zero en la ecuación (35) $\Omega_i = 0$. Si miramos la solución general (usando (23)), nos queda

$$x(t) = A\exp(-\frac{\gamma}{2m}t)$$

es decir una caida exponencial, sin más.

6.3. Oscilaciones sobre-amortiguadas

Si seguimos aumentando la fricción por encima de su valor crítico, no esperaremos encontrar oscilaciones nunca más. Por el contrario uno espera que la caída exponencial sea aún más rápida. Esto es lo que ocurre, en efecto, si

$$\frac{\gamma}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$$

entonces vemos en la ecuación (33) que la "frecuencia" no tiene parte imaginaria (es decir parte oscilatoria): el resultado es de pura caída exponencial

$$x(t) = A\exp\left[\left(\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t\right]$$

Es decir el ritmo de caida es ahora incluso mayor que en el caso crítico, $\gamma/(2m)$, siendo $\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{(\frac{\gamma}{2m})^2 - \frac{k}{m}}$.

7. Oscilaciones forzadas

Como la vida misma, si queremos mantener cualquier sistema oscilando en el tiempo, sin parar, necesitamos darle una fuerza externa, una "forzante" que impida que se pare. Este es el oscilador forzado, que

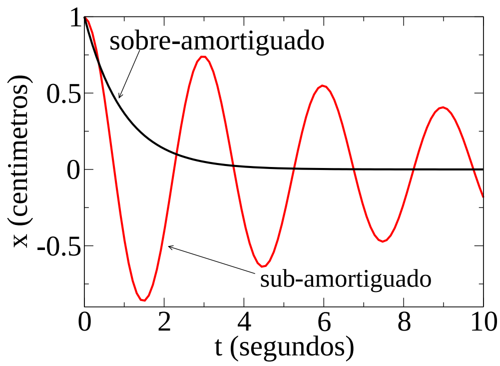

Figura 6: Comparación entre un muelle sobreamortiguado y uno subamortiguado.

en realidad es el que se usa en los péndulos de reloj para que no paren (vamos, por eso hay que darles cuerda, para mantener la "forzante"). Ahora las fuerzas sobre el sistema son

$$F_{\text{total}} = F_{\text{muelle}} + F_{\text{friccion}} + F_{\text{externa}} \tag{37}$$

Si queremos que el sistema oscile, lo lógico es dare una fuerza externa $F_{externa}$ que sea oscilatoria. Vamos a elegir ésta,

$$F_{\text{externa}} = F_0 \cos(\omega_{ex} t) \tag{38}$$

La frecuencia de la "forzante" es ω_{ex}, y la imponemos nosotros. Es decir, podemos elegir la que queramos. Sin embargo, como veremos no todas las frecuencias forzantes actúan igual sobre el sistema. La razón es simple: el sistema tiene su propia frecuecia "natural" ω_0 que determina el tiempo (periodo) que tarda el sistema en reaccionar a una perturbación externa. Es intuitivo pensar que el sistema "sentirá" la perturbación periódica con más intensidad si la perturbación se hace a un ritmo similar al tiempo que tarda el sistema en reaccionar. Esto se llama **resonancia**.
La ecuación diferencial que se obtiene, usando $F_{total} = m\ddot{x}$, la decomposición de fuerzas (37) y la fuerza external (38) es,

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_{ex} t) \tag{39}$$

Para resolver esta ecuación diferencial es necesario apostar fuerte. Por un lado, supongamos que tenemos una solución de (39), llamemosla, por ejemplo $x_p(t)$. Tomemos ahora la solución del oscilador amortiguado (con forzante nula), la llamare $x_h(t)$. Ambas x_p y x_h cumplen respectivamente,

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx_p}{dt} + \frac{k}{m}x_p = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_{ex} t) \tag{40}$$

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx_h}{dt} + \frac{k}{m}x_h = 0 \tag{41}$$

Pero si sumamos ambas soluciones $x_p + x_h$ en las ecuaciones (40) y (41) vemos que también se cumple la relación buscada (39). Es decir,

$$\frac{d^2(x_h + x_p)}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{d(x_h + x_p)}{dt} + \frac{k}{m}(x_h + x_p) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_{ex} t)$$

Por tanto, la solución general se compone de dos partes, x_h y x_p. En concreto deberíamos:

- 1) encontrar una solución particular x_p a la ecuación (39) y
- 2) sumarle la solución x_h del problema sin forzante.

Ya conocemos la solución del problema sin forzante, $x_h(t)$: es la dada en la sección anterior por la fórmula (36). Sabemos que $x_h(t)$ termina por "desaparecer" debido al término de la exponencial decreciente $\exp[-(\gamma/2m)t]$. Por ello esta parte de la solución $x_h(t)$ se denomina solución **transitoria**. Nosotros estamos más bien interesados en como se comporta el sistema ante una forzante exterior que está siempre ahí, forzando. Por tanto nos interesa la **dinámica a tiempos largos**, mucho mayores que el tiempo de fricción $t >> 2m/\gamma$. Así pues nos olvidamos de la parte transitoria x_h y nos centramos en la solución particular del problema $x_p(t)$.
Por tanto, a partir de ahora a $x_p(t)$ la llamaré $x(t)$, para abreviar.
Antes de estudiar el problema del oscilador forzado con amortiguamiento en la ecuación (39), vamos a considerar uno algo más simple: el oscilador forzado SIN mortiguamiento! Su ecuación de movimiento es ciertamente,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_{ex} t) \tag{42}$$

Para resolver esta ecuación, podemos intentar nuestra apuesta del éxito (20) introduciéndla en (42). Este camino es posible, pero tiene pequeñas complicaciones (los interesados pueden intentarlo y preguntarme dudas). En su lugar vamos a usar una nueva apuesta mejor. Si os fijais en la ecuación (42) tenemos una combinación de términos del tipo $x(t)$ y $\ddot{x}$ a la derecha de la igualdad, igualados a un término forzante del tipo $\cos(\omega_{ex} t)$. Esa función nos da una pista muy buena: parece que la solución $x(t)$ debe de oscilar al mismo ritmo que la forzante $F_0 \cos(\omega_{ex} t)$. Por tanto [1] lo mejor es que apostemos por una solución como,

$$x(t) = A\cos(\omega_{ex} t), \tag{43}$$

que al introducirla en (42) nos queda,

$$-A\omega_{ex}^2 \cos(\omega_{ex} t) + \frac{k}{m}A\cos(\omega_{ex} t) = F_0 \cos(\omega_{ex} t).$$

Por lo que, ordenando términos y simplificando factores comunes, tenemos,

$$A = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega_{ex}^2)} \tag{44}$$

donde, como siempre, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular del oscilador armónico simple.
Efectivamente, al excitar al muelle sin amortiguamiento con una frecuencia externa igual a su frecuencia natural, su amplitud se hace infinita: es decir en la realidad el sistema explota, se parte. Este fenómeno es un ejemplo extremo de **resonancia**. Vayamos por fín al oscilador forzado con amortiguamiento para ver como la fricción evita, hasta cierto punto, la explosión en la *frecuencia de resonancia*.

[1] Esto puede verse también asi: las derivadas de funciones trigonométricas son también trigonometricas. Ademas las funciones trigonométricas de distintas frecuencias son todas "independientes".

Si intentais resolver la ecuación (39) como antes vais a tener un problema con el termino $\dot{x}$, porque al derivarlo os va a dar un $\sin(\omega_{ex}t)$, que no se elimina con el resto de los $\cos(\omega_{ex}t)$ que aparecen. La solución pasa por hacer otra apuesta más general:

$$x(t) = a\cos(\omega_{ex}t) + b\sin(\omega_{ex}t) \tag{45}$$

Sustituyendo la apuesta (45) en la ecuación (39), igualando por un lado todos los términos que tengan $\cos(\omega_{ex}t)$ y por otro todos los que tengan $\sin(\omega_{ex}t)$ se llega a un sistema de dos ecuaciones para a y b (lo dejo como ejercicio). Finalmente podemos expresar la solución como,

$$x(t) = A\cos(\omega_{ex}t - \delta) \tag{46}$$

Donde la amplitud es,

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_{ex}^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{\gamma\omega_{ex}}{m}\right)^2}} \tag{47}$$

y la constante de fase viene dad por

$$\tan\delta = \frac{\gamma\omega_{ex}}{m(\omega_0 - \omega_{ex}^2)} \tag{48}$$

Analizaremos esta solución del oscilador forzado en las cuestiones.

CUESTIONES -3-

3.1 A partir de argumentos dimensionales en la ecuación (31) haz una estimación del tiempo asociado a la fricción. Para ello, sigue estas pistas:

- ¿ Qué unidades tiene la ecuación (31) ?
- Todos los sumandos de cualquier ecuación tienen las mismas unidades. Sabiendo esto saca la unidad de γ/m a partir de la unidad de la ecuación (31) y verás como sale el inverso de un tiempo (ese tiempo es el que buscas).

3.2 Ese tiempo que buscas es el **tiempo de fricción**; se trata aproximadamente del tiempo en que la fricción consigue detener al oscilador. Por otro lado, ya sabemos que la frecuencia "natural" angular (en rad/seg) del muelle (no amortiguado) es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Por tanto su periodo (segundos) es $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Razona que pasará cuando el tiempo de fricción sea mucho menor que el periodo natural del muelle, T_0. ¿Qué pasará cuando sea mucho mayor?.

3.3 Calcular cómo varía la energía cinética $E_c(t)$ del oscilador amortiguado promediada en el periodo de oscilacion $T = 2\pi/\omega$. Este promedio es,

$$\bar{E}_c = \frac{1}{2T} m \int_0^T v^2 dt$$

3.4 Calculad el promedio de la energía potencial $\bar{U}$ de un oscilador amortiguado a lo largo de un periodo de oscilación y ver como varía en el tiempo. Recordad que $U(x) = kx^2$

3.5 A partir de los cálculos anteriores ver como depende con el tiempo la energía total promediada en un periodo de oscilación $\bar{E}(t) = \bar{E}_c(t) + \bar{U}(t)$ del oscilador amortiguado? Como veis $\bar{E}$ decrece con el tiempo. Pero si la energía total, se conserva ¿qué pasa con la energía que se pierde?

3.6 Que decae más rápidamente, ¿la energía o la velocidad del oscilador?

3.7 Obtener la constante del muelle k y el coeficiente de fricción γ del muelle de la figura 5.

3.8 ¿ Cuánto deberiamos de aumentar el coeficiente de fricción del muelle de la figura 5 para que ya no sea capaz de oscilar ?

3.9 ¿Qué le ocurre al oscilador forzado sin amortiguar cuando la frecuencia externa se elige igual a su frecuencia natural, $\omega_{ex} = \omega_0$?

3.10 Obtén la amplitud (47) y constante de fase (48) a partir la apuesta (45).

3.11 Obtén la energía total de un oscilador forzado, sabiendo que su solución viene dada por la ecuación (46).

3.12 Dibuja esquemáticamente como depende la energía del oscilador forzado (47) con la frecuencia forzante. ¿Para que valor de la frecuencia externa recibe más energía el oscilador?

3.13 El desfase entre la forzante $F_0 \cos(\omega_{ex} t)$ y la solución del oscilador forzado $A\cos(\omega_{ex} t - \delta)$ es siempre negativo $(-\delta)$. ¿Porqué? ¿Cuál es el desfase entre la fuerza externa y la posición del oscilador cuando se entra en resonancia?