Mecánica Estadística, curso 2013-2014
Problemas Tema 3: Sistema de espines con interacción
Hoja 5

1. Estudio del modelo de Ising 2D en una red cuadrada con $N \times N$ spines y condiciones periódicas de contorno usando simulaciones con el método de MonteCarlo.

$$H = -J \sum_{<ij>nn}^{i,j=1,\ldots,N} s_i s_j - \mu H \sum_{i=1}^{N} s_i; \qquad\qquad s_i = \pm 1$$

   - Verificar si la T_c se ajusta a la predicha por la solución exacta de Onsager: $T_c = \frac{2{,}269J}{k}$.
   - Calcular el valor esperado de las fluctuaciones de la energía y la magnetización como función de T alrededor de T_c. ¿Puedes usar esta información para determinar algun exponente crítico?.
   - Modificar el programa para poder estudiar el comportamiento de la función de correlación conectada $\Gamma(r)$ como función de la distancia y de la temperatura alrededor de T_c. ¿Se ajustan estos resultados a lo que esperamos teóricamente?. ¿Qué puedes decir de la longitud de correlación?

2. Considerar el desarrollo de Landau para la energía libre de un ferromagneto en un campo magnético h:

   $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 - hm + a_2 m^2 + a_4 m^4$

   Calcular la susceptibilidad isoterma χ y determinar su exponente crítico γ. Demostrar que $\frac{\chi(t\to 0^+)}{\chi(t\to 0^-)} = 2$.

3. La magnetización espontanea por spin de un modelo de Ising 2D en una red cuadrada con interacción a primeros vecinos viene descrita de forma exacta por $\langle s\rangle^8 = 1 - (\sinh 2J/kT)^{-4}$. Demostrar que puede escribirse como $\langle s\rangle = B(-t)^\beta\,[1 + b(-t) + \cdots]$ con $t = (T - T_c)/T_c$ y $\beta = 1/8$. Determinar B y b, y estimar para que rango de temperaturas podemos quedarnos sólo con el primer termino del desarrollo. Comparar gráficamente esta aproximación y la solución exacta.

4. Determinar las expresiones exactas de la función de partición, la energía libre, la magnetización, la función de correlación y la longitud de correlación para un modelo de Ising 1D con interacción a primeros vecinos.

5. Modelo de Ising 1D con $s = 1$, interacción a primeros vecinos y en ausencia de campo magnético.

$$H = -J \sum_i s_i s_{i+1}; \qquad\qquad s_i = \pm 1, 0$$

   - Escribir la matriz de transferencia.
   - Demostrar que la energía libre por spin viene dada por:

$$f = -kT \ln \left\{ \left(1 + 2\cosh\beta J + \left[(2\cosh\beta J - 1)^2 + 8 \right]^{1/2} \right) /2 \right\}$$

   y comprobar que se recuperan los límites correctos en $T \to 0$ y $T \to \infty$

6. Demostrar la expresión de la función de correlación en terminos de los autovalores y autovectores de la matriz de transferencia:

$$\Gamma_R = \sum_{i\neq 0} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0} \right)^R \langle \bar{\mathbf{u}}_0 | \mathbf{s}_0 | \bar{\mathbf{u}}_i \rangle \langle \bar{\mathbf{u}}_i | \mathbf{s}_R | \bar{\mathbf{u}}_0 \rangle$$

   donde $|\bar{\mathbf{u}}_i\rangle$ es el autovector de $\mathbf{T}$ correspondiente a λ_i, y $\mathbf{s}_R$ es la matriz diagonal con autovalores iguales a los posibles valores de s_R y con autovectores $\langle \bar{\mathbf{s}}_R| = (00\cdots 010 \cdots 00)$.